Serie 7

1. Finde $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ mit $d\omega = 0$, so daß es kein $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ gibt, mit $d\alpha = \omega$. *4 Pkte.*

2. **a)** Berechne $\int_F \omega$ für

$$F = \{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\}$$

und $\omega = x dy \wedge dz - z^2 dx \wedge dz$. *2 Pkte.*

b) Gibt es einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so dass für $\omega_o = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ und $\Sigma = \varphi(F) \times \{0\}$ mit F aus a) gilt: $\int_\Sigma \omega_o > 0$? *2 Pkte.*
Hinweis: Zeige

$$\int_\Sigma \omega_o = \int_F \varphi^*(dx_1 \wedge dx_2)\,.$$

3. **a)** Es sei $E^n \subset \mathbb{R}^n$ der abgeschlossene Einheitsball und $\partial E^n = S^{n-1}$. Es sei $h \colon E^n \to S^{n-1}$ eine C^∞-Abbildung. Zeige: Dann kann nicht $h_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}$ gelten. Hinweis: Berechne $\int_{\partial E^n} h^*\omega$ für die $(n-1)$-Form $\omega = x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$. *2 PKte.*

b) Zeige: Es gibt keine glatte Abbildung $f \colon E^n \to E^n$ ohne einen Fixpunkt $x \in E^n$ mit $f(x) = x$. Hinweis: Zeige, falls doch, so könnte man ein h wie in a) konstruieren mit $h_{|S^{n-1}} = \mathrm{id}$. *2 Pkte.*

4. Es seien $0 < r < R$. Betrachte die Kurven

$$\gamma_1(t) = \big(R + r\cos 2\pi t, 0, r \sin 2\pi t\big),$$
$$\gamma_2(t) = \big((R-r)\cos 2\pi t, (R-r)\sin 2\pi t, 0\big)\,.$$

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ die offene Teilmenge

$$U = \big\{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \in \big((r-\varepsilon)^2, (r+\varepsilon)^2\big) \,\big\}$$

für $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$. Finde 1-Formen $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(U)$ mit $d\alpha_1 = d\alpha_2 = 0$ und

$$\int_{\gamma_i} \alpha_i \;=\; \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2\,.$$

2 Pkte.

b) Berechne für α_1, α_2 aus Aufgabe 1.a)

$$\int_F \alpha_1 \wedge \alpha_2$$

für $F = \big\{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\big\}$. *2 Pkte.*

c) **optional** Warum hängt das Integral $\int_F \alpha_1 \wedge \alpha_2$ nicht von der konkreten Wahl von α_1 und α_2 ab? *2 Pkte.*

Rückgabe: In den Kasten am 01.12.