Serie 6

1. Sei $U \subset R^n$ offen, $\alpha \in \Omega^1(U)$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Dann definieren wir

$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \alpha_{\gamma(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)dt\,.$$

a) *Zeige*: Falls $\alpha = df$ für ein $f \in C^\infty(U)$, dann gilt

$$\int_\gamma \alpha = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)\,.$$

1 Pkt.

b) Finde ein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\})$ mit $d\alpha = 0$ und so, dass kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\})$ existiert mit $df = \alpha$. *3 Pkte.*

2. **a)** Es sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ eine beliebige C^1-Kurve in $\mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$,

$$f(s,t) = \big(\cos s\, u(t), \cos s\, v(t), \sin s\, u(t), \sin s\, v(t)\big)$$

und $\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$. Berechne $f^*\omega$. *2 Pkte.*

b) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres parametrisiertes Flächenstück mit Normalenfeld $n\colon U \to S^2$. Es sei $\omega = n \lrcorner \operatorname{vol}$. Dies liefert eine 2-Form auf $F = f(U)$. Zeige: $\int_F \omega$ ist gleich dem Flächeninhalt von F. *2 Pkte.*

3. Finde $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $d\omega = 0$, so daß es kein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ gibt, mit $d\alpha = \omega$. *4 Pkte.*

4. Betrachte die durch $f(\vartheta, \phi) = \big((R + r\cos\vartheta)\cos\phi, (R + r\cos\vartheta)\sin\phi, r\sin\vartheta\big)$, $(\vartheta, \phi) \in [0, 2\pi]^2$ parametrisierte Fläche

$$F = \{\, (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \,\}$$

mit $0 < r < R$. Es sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

a) *Zeige*: Falls $d\omega = 0$, so gilt $\int_f \omega = 0$. *4 Pkte.*

b) **optional**: Finde eine offene Umgebung U von F in $\mathbb{R}^3$ und $\eta \in \Omega^2(U)$ mit $d\eta = 0$ und $\int_f \eta > 0$. *2 Pkte.*

Rückgabe: In den Kasten am 24.11.