Serie 5

1. Es seien $\alpha \in \Lambda^1 V^*$, $\beta \in \Lambda^k V^*$ für $\dim V = n$, $2 \leq k \leq n$. *Zeige*:

$$\alpha \wedge \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha \wedge \omega \quad \text{für ein } \omega \in \Lambda^{k-1} V^* .$$

2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte die VR-Isomorphismen (siehe Satz 3.2.3 aus der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(U) &\xrightarrow{\cong} \Omega^1(U), \quad X \mapsto X^* = \langle X, \cdot \rangle, \\ \mathcal{X}(U) &\xrightarrow{\cong} \Omega^{n-1}(U), \quad X \mapsto X \lrcorner \operatorname{vol}, \\ C^\infty(U) &\xrightarrow{\cong} \Omega^{n-1}(U), \quad f \mapsto f \cdot \operatorname{vol} . \end{aligned}$$

Beweise, dass dies Isomorphismen sind (1 Pkt.) und zeige: Dann gilt

- $(\nabla f)^* = df$ f.a. $f \in C^\infty(U)$, *1 Pkt.*
- $d(X \lrcorner \operatorname{vol}) = \operatorname{div} X \cdot \operatorname{vol}$ f.a. $X \in \mathcal{X}(U)$, mit $\operatorname{div}(X^1, \ldots, X^n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$, *1 Pkt.*
- $dX^* = \operatorname{rot} X \lrcorner \operatorname{vol}$ für $X \in \mathcal{X}(U)$, falls $n = 3$. *1 Pkt.*

3. Berechne die Standarddarstellung folgender Differentialforman (d.h. in der kanonischen Basis): (*je 1/2 Pkt.*)

a) im $\mathbb{R}^2$: $(\sin x\, dx - \cos y\, dy) \wedge (\cos y\, dx + \sin x\, dy)$

b) im $\mathbb{R}^3$: $(x\, dx + xy\, dy + xyz\, dz) \wedge (2yz\, dy \wedge dz - dx \wedge dz + z dx \wedge dz)$

c) im $\mathbb{R}^{2n}$: $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-mal) für $\omega = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$

d) im $\mathbb{R}^3$: $d(xdx + ydy + zdz)$

e) im $\mathbb{R}^3$: $d\big((x + \sin y)dx + (y + \sin x)dy + ydz\big)$

f) im $\mathbb{R}^3$: $d(xyz\, dx \wedge dy + xy\, dy \wedge dz - \frac{1}{2} y^2 (x-1)\, dz \wedge dx)$

g) im $\mathbb{R}^3$: $f^*(ydx + xdy)$ mit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$

h) im $\mathbb{R}^3$: $f^*(x^2 dx)$, mit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

4. Verwende die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

$$(x, y, z) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r\cos\vartheta) .$$

a) Drücke dr, $d\vartheta$, $d\varphi$ durch dx, dy, dz aus und umgekehrt. (*2 Pkte.*)

b) Es sei $\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Es sei $f \colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (\vartheta, \varphi) \mapsto f(\vartheta, \varphi) \in S^2$ die Parametrisierung durch Kugelkoordinaten. Berechne $f^*\omega$. (*2 Pkte.*)

Rückgabe: In den Kasten am 16.11.