Serie 4

1. **a)** Es sei $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve parametrisiert durch $\gamma(u) = \big(f(u), g(u)\big)$ mit $|\dot\gamma(u)| = 1$ und $f(u) > 0$ f.a. $0 \le u \le L$. $\gamma_{[0,L)}$ sei injektiv und $\gamma(0) = \gamma(L)$. Betrachte γ als in der x-z-Ebene liegend.
Sei F die Rotationsfläche, die durch Rotation von γ um die z-Achse entsteht. Gib eine möglichst einfache Formel für den Flächeninhalt von F. *3 Pkte.*

b) Berechne den Flächeninhalt von

$$T_{a,b} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2 \right\}, \quad 0 < a < b\,.$$

1 Pkt.

2. Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus

$$\{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \} \qquad 0 < r < R\,.$$

a) Berechne das Einheitsnormalenfeld $\vec{n}$ auf T mit $n(r+R,0,0) = (1,0,0)$ und für das Vektorfeld $v(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$ das Integral $\int_T v \cdot \vec{dS}$ bzgl. der Orientierung durch n. *2 Pkte.*

b) Berechne direkt (ohne Verwendung des Satzes von Gauß) das Integral

$$\iiint_V \operatorname{div} v d^3(x,y,z)$$

über den Volltorus V mit $\partial V = T$. *2 Pkte.*

3. **a)** Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $X \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zeige:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0\,.$$

2 Pkte.

b) Finde ein divergenzfreies Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, welches kein Rotationsfeld ist, also daß kein Y auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{rot} Y = X$ existiert. *2 Pkte.*

4. **a)** Sei

$$F = \{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,\, y^2 + z^2 \ge \frac{r^2}{9} \} \qquad 0 < r < R,$$

orientiert durch $\vec{n}$ mit $\vec{n}(R,0,r) = (0,0,1)$. Berechne ∂F und bestimme die induzierte Orientierung. Sei $\vec{X} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ und berechne $\iint_F \vec{X} \cdot \vec{dS}$. *2 Pkte.*

b) Sei $F = \{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \}$ und berechne $\displaystyle\iint_F \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{dS}$ für ein beliebiges C^1-Vektorfeld $\vec{X}$ auf F. *2 Pkte.*

Rückgabe: In den Kasten am 09.11.