Serie 3

1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Menge der rationalen Punkte im 2-dimensionalen Einheitsquadrat $[0,1]\times[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Für $n\in\mathbb{N}$ bezeichne mit I_n das kompakte Quadrat mit Mittelpunkt x_n und Kantenlänge 2^{-n}. Sei nun V die abzählbare Vereinigung der offenen Quadrate

$$V = \overset{\circ}{I}_1 \cup \overset{\circ}{I}_2 \cup \dots .$$

Dies ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige: V ist beschränkt und offen. *1 Punkt*

b) Zeige: $\underline{\int}_V 1\, d^2(x,y) \le \frac{1}{3}$. *1 Punkt*

c) Zeige: $\overline{\int}_V 1\, d^2(x,y) \ge 1$. *1 Punkt*

d) Folgere: V ist nicht Jordan-messbar. *1 Punkt*

2. **a)** Es sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation $T(x) = Ax + b$, $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$, $\det A \neq 0$. Zeige: Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Jordan-messbaren Menge $K\subset\mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen $v_n(K) > 0$, so ist der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$ durch den Bildpunkt $T(S)$ gegeben. *2 Punkte.*

b) Es sei $V\subset\mathbb{R}^3$ der Volltorus zu den Parametern $0 < a < b$.

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - b)^2 + z^2 \le a^2\,\}\,.$$

Berechne das Trägheitsmoment $\int_V (x^2+y^2)\, d^3(x,y,z)$. *2 Punkte.*

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $g\in C^1(U,\mathbb{R})$ und $c\in\mathbb{R}$ ein regulärer Wert von g, also $\nabla g(x) \neq 0$ f.a. $x \in N_c(G) = g^{-1}(c)$. *Zeige*: Dann ist $N_c(g)$ lokal in jedem Punkt ein parametrisiertes Flächenstück.
Hinweis: Implizite Funktionen. *4 Punkte*

4. **a)** Zeige, daß das skalare Oberflächenelement eines parametrtisierten Flächenstücks von der Parametrisierung unabhängig ist. 2 *Punkte.*

b) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = \big(\varphi(s),\psi(s)\big)$, eine C^1-Kurve mit $\dot\gamma(s) \neq 0$ und $\psi(s) > 0$ f.a. $s\in[a,b]$. Betrachte die Rotationsfläche $f(s,t) = \big(\varphi(s), \psi(s)\cos t, \psi(s)\sin t\big)$. *Zeige*: Der Flächeninhalt beträgt *2 Punkte*

$$A(f) = 2\pi \int_a^b \psi(s)|\dot\gamma(s)|ds\,.$$

Rückgabe: In den Kasten am 02.11.