Serie 2

1. **a)** Es sei $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine $(n-1)$-dimensionale Jordan-Nullmenge. *Zeige*: Dann ist $N \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale J.-Nullmenge. *2 Pkte.*

b) Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. *Zeige*: Dann ist $\operatorname{graph} f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in A \}$ eine n-dimensionale J.-Nullmenge. *1 Pkt.*

c) *Beweise oder widerlege*: $\operatorname{graph} f$ für $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ist genau dann eine n-dimensionale Nullmenge, wenn ∂X eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist. *1 Pkt.*

2. **a)** Berechne das Volumen von $\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1,\ |z| \leq 2 \}$. *1 Pkt.*

b) Berechne das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge l. *1 Pkt.*

c) Integriere die Funktion z^2 über die Kugel $\{ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$. *2 Pkte.*

3. Der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positiven Volumen V ist definiert durch den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i = \frac{1}{V} \int_K x_i d^n x, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Berechne den Schwerpunkt

a) von $\{ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0 \}$. *2 Pkte.*

b) eines Kegels $K(B,h) = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq z \leq h,\ x \in (1 - \frac{z}{h})B \}$, $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar. *2 Pkte.*

4. Es sei $C \subset \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, die eine Dezimalbruchdarstellung besitzen, in welcher die Ziffer 5 nicht vorkommt. Zeige:

a) C ist eine 1-dimensionale Nullmenge. *3 Pkte.*

b) C lässt sich bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbilden. *1 Pkt.*

Rückgabe: In den Kasten am 26.10.