Serie 2

1. a) *Zeige (3 Punkte)*: Ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M ein Produkt von Sphären,

$$M \approx S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_r}, \quad k_1 + \ldots + k_r = n,$$

so gibt es eine Einbettung $M \to \mathbb{R}^{n+1}$. ($\approx =$ diffeomorph zu)

b) *(1 Punkt)* Beschreibe eine Einbettung $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ mit elementaren Funktionen.

2. a) Es sei $\bar{f}$ Keim einer differenzierbaren Abbildung $(M,p) \to (N,q)$ zwischen Mannigfaltigkeiten mit $\operatorname{Rang} D_p f = r$.
Zeige (2 Punkte): Ex. Umgebung $U(p)$ so daß $\operatorname{Rang} D_{p'} f \geq r$ f.a. $p' \in U(p)$.

b) Es sei $G(n,k)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit aus Aufgabe 4. Blatt1. Betrachte darin das kanonische Element $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und die Teilmengen

$$G_i(n,k) = \{\, U \in G(n,k) \mid \dim U \cap \mathbb{R}^k \ = \ i \,\}\,.$$

Zeige (2 Punkte): Jedes G_i ist eine Untermannigfaltigkeit von $G(n,k)$ und bestimme die Dimension.

c) *optional (2 Punkte)*: Bestimme die Diffeomorphieklasse von $G_i(n,k)$.

3. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\mathcal{E}_p$ der Ring der glatten Funktionenkeime in p. ($\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)$) Es sei $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{E}_p$ das maximale Ideal der Keime, die in p verschwinden.

a) *Zeige (2 Punkte)*: $\mathfrak{m}_n \subset \mathcal{E}_n$ ist erzeugt von den Keimen $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ der Koordinatenfunktionen.

b) *(2 Punkte)*: Es sei $\mathfrak{m}_p^2 = \{\, \bar{f} \cdot \bar{g} \mid \bar{f}, \bar{g} \in \mathfrak{m}_p \,\}$. Zeige: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \ \cong \ (T_p M)^*$$

auf den zu $T_p M$ dualen $\mathbb{R}$-Vektorraum. *Hinweis: Finde eine kanonische nicht-degenerierte Bilinearform* $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \times T_p M \to \mathbb{R}$.

4. a) Sei M eine C^2-Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann bezeichne mit $f'(p) = D_p f$ das Differential einer Funktion $f \in C^1(M,\mathbb{R})$. Bezeichne mit $\operatorname{Crit} f = \{\, p \in M \mid f'(p) = 0 \,\}$ die Menge der kritischen Punkte von f.
Zeige (2 Punkte): Die "zweite Ableitung" von f, d.h. die Hessesche $Hf(p) = f''(p)$ ist genau dann wohldefinierbar in p, wenn $p \in \operatorname{Crit} f$, und dann ist $f''(p)$ eine symmetrische Bilinearform auf $T_p M$.

b) Verifiziere im Detail, daß

$$[\cdot,\cdot] \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$
$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{f.a. } f \in C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

eine wohldefinierte Lie-Algebra-Struktur auf dem $C^\infty(M)$-Modul $\mathfrak{X}(M)$ der glatten Vektorfelder einer glatten Mannigfaltigkeit M definiert.

Rückgabe: Mittwoch, 29.10.03, in der Übung.