Serie 11

1. Es sei $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rank r mit einem Zusammenhang ∇. Betrachte den zugehörigen Krümmungsoperator $K = \hat{\nabla} \circ \nabla \colon \Gamma(E) \to \Omega^2(M) \otimes \Gamma(E)$ und den Riemannschen Krümmungsoperator

$$R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s,$$

für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$.

a) *(2 Punkte)* Zeige: $K = R$.

b) *(2 Punkte)* Zeige: $(\nabla_Z R)(X,Y)s + (\nabla_X R)(Y,Z)s + (\nabla_Y)(Z,X)s = 0$ f.a. $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$.

2. *(4 Punkte)* Sei (M,g) eine Riemansche Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, daß der Paralleltransport bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs entlang einer Kurve von p nach q nur von den Endpunkten $p, q \in M$ abhängt. Zeige: (M,g) ist flach.

3. a) *(4 Punkte)* Betrachte den 2-dimensionalen Torus $T_{r,R} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\vartheta, \varphi) = \big((R + r\cos\vartheta)\cos\varphi, (R + r\cos\vartheta)\sin\varphi, r\sin\vartheta\big)$$

und berechne den Shape-Operator S_η, die Hauptkrümmungen λ_1, λ_2, die Gauß-(Kronecker)-Krümmung und die mittlere Krümmung. Erkläre jeweils die Vorzeichen.

b) *(4 Punkte)* Betrachte die Immersion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\vartheta, \sin\vartheta, \cos\varphi, \sin\varphi\big)$$

Zeige, daß $T := f(\mathbb{R}^2) \subset S^3$ in der Einheitssphäre liegt, einen eingebetteten Torus beschreibt und berechne die Schnittkrümmung von T in der induzierten Metrik.

Rückgabe: Mittwoch, 28.1.04, in der Übung.