Serie 6

1. Berechne die Standarddarstellung folgender Differentialforman (d.h. in der kanonischen Basis):

a) im $\mathbb{R}^2$: $(\sin x\,dx - \cos y\,dy) \wedge (\cos y\,dx + \sin x\,dy)$

b) im $\mathbb{R}^3$: $(x\,dx + xy\,dy + xyz\,dz) \wedge (2yz\,dy \wedge dz - dx \wedge dz + zdx \wedge dz)$

c) im $\mathbb{R}^{2n}$: $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-mal) für $\omega = (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$

d) im $\mathbb{R}^3$: $d(xdx + ydy + zdz)$

e) im $\mathbb{R}^3$: $d\big((x + \sin y)dx + (y + \sin x)dy + ydz\big)$

f) im $\mathbb{R}^3$: $d(xyz\,dx \wedge dy + xy\,dy \wedge dz - \frac{1}{2}y^2(x-1)\,dz \wedge dx)$

g) im $\mathbb{R}^3$: $f^*(ydx + xdy)$ mit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$

h) im $\mathbb{R}^3$: $f^*(x^2dx)$, mit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

2. Die Zylinderkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$(x,y,z) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z),$$

die Kugelkoordinaten durch

$$(x,y,z) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)\,.$$

a) Zeige, daß die zugehörige Orthonormalbasis aus Tangentialvektoren in den jeweiligen Koordinatenrichtungen gegeben ist durch

$$\vec{e}_\varrho = \frac{\partial}{\partial\varrho}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

bzw.

$$\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

b) Berechne $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\vec{X}$, $\operatorname{div}\vec{X}$ in Zylinderkoordinaten, wobei f eine Funktion und $\vec{X}$ ein Vektorfeld ist,

c) **optional, 2 Pkte.** Berechne $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\vec{X}$, $\operatorname{div}\vec{X}$ in Kugelkoordinaten, wobei f eine Funktion und $\vec{X}$ ein Vektorfeld ist.

3. Verwende dieselben Kugelkoordinaten r, ϑ, φ wie in Aufgabe 2.).

a) Drücke dr, $d\vartheta$, $d\varphi$ durch dx, dy, dz aus und umgekehrt.

Bitten wenden!

b) Es sei $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Es sei $f\colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \ni (\vartheta, \varphi) \mapsto f(\vartheta, \varphi) \in S^2$ die Parametrisierung durch Kugelkoordinaten. Berechne $f^*\omega$.

4. **a)** Es sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ eine beliebige C^1-Kurve in $\mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$,

$$f(s,t) = (\cos s\, u(t), \cos s\, v(t), \sin s\, u(t), \sin s\, v(t),$$

und $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. Berechne $f^*\omega$.

b) Finde $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $d\omega = 0$, so daß es kein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ gibt, mit $d\alpha = \omega$.

c) Finde $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\})$ mit $d\alpha = 0$, so daß es kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\})$ gibt mit $df = \alpha$.

Rückgabe: In den Übungsgruppen am 28.11. und 29.11.