# Serie 5

**1.** **a)** Sei

$$F = \{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,\ y^2 + z^2 \geq \frac{r^2}{9} \} \qquad 0 < r < R,$$

orientiert durch $\vec{n}$ mit $\vec{n}(R,0,r) = (0,0,1)$. Berechne $\partial F$ und bestimme die induzierte Orientierung. Sei $\vec{X} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ und berechne $\iint_F \vec{X} \cdot \vec{dS}$.

**b)** Sei $F = \{ (x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \}$ und berechne $\iint_F \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{dS}$ für ein beliebiges $C^1$-Vektorfeld $\vec{X}$ auf $F$.

**2.** Es seien $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ $C^1$-Vektorfelder und $\psi$ eine $C^1$-Funktion auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^3$. Wir verwenden die Notationen

$$\vec{r} = (x,y,z), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},$$

sowie $\Delta\vec{X} = (\Delta X^1, \Delta X^2, \Delta X^3)$ und $\vec{X} \cdot \nabla = (X^1 \frac{\partial}{\partial x}, X^2 \frac{\partial}{\partial y}, X^3 \frac{\partial}{\partial z})$

**a)** Leite folgende oft benutzte Formeln her:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{X}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{X}) - \Delta\vec{X}, \\
\nabla \cdot (\psi\vec{X}) &= \vec{X} \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot \vec{X}, \\
\nabla \times (\psi\vec{X}) &= \nabla\psi \times \vec{X} + \psi\nabla \times \vec{X}, \\
\nabla(\vec{X} \cdot \vec{Y}) &= (\vec{X} \cdot \nabla)\vec{Y} + (\vec{Y} \cdot \nabla)\vec{X} + \vec{X} \times (\nabla \times \vec{Y}) + \vec{Y} \times (\nabla \times \vec{X}), \\
\nabla \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}) &= \vec{Y} \cdot (\nabla \times \vec{X}) - \vec{X} \cdot (\nabla \times \vec{Y}),
\end{aligned}$$

**b)** Berechne

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla\psi &= \\
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{X}) &= \\
\nabla \cdot \vec{r} &= \\
\nabla \times \vec{r} &= \\
\nabla \cdot \vec{n} &= \\
\nabla \times \vec{n} &=
\end{aligned}$$

**Bitten wenden!**

**3.** Verwende die gleichen Notationen wie in 2.)

**a)** Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine $C^1$-Funktion. Berechne $\nabla \cdot (f(r)\vec{r})$ und $f$ so, daß die Divergenz $0$ ergibt.

**b)** Finde ein divergenzfreies Vektorfeld $\vec{X}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, welches kein Rotationsfeld ist, also daß kein $\vec{Y}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\nabla \times \vec{Y} = \vec{X}$ existiert.

**4.** Es seien $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. *Zeige*:

$$\alpha \wedge \omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \alpha \wedge \beta \quad \text{für ein } \beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)\,.$$

**Rückgabe:** In den Übungsgruppe am 21.11. bzw. in der Vorlesung am 23.11.