Serie 3

1. Betrachte die folgenden beiden Parametrisierungen von $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ als Flächenstücke und berechne jeweils explizit den Flächeninhalt.

a) $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2v^2+1} \right),$$

b) $\psi\colon [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\psi(\vartheta,\varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)\,.$$

2. Sei

$$K = \left\{ (x,y,z) \,|\, 1 \le (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2 \le 4,\ -c \le 2 \le c \right\}, \quad 0 < a < b,\ c > 0\,.$$

Sei l eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ und $\varrho\colon K \to [0,\infty)$ die Funktion $\varrho(\mathbf{r}, l) = \operatorname{dist}(\mathbf{r}, l) =$ der Abstand von $\mathbf{r}$ zu der Geraden l. Dann heißt

$$T_{K,l} = \iiint_K \varrho(x,y,z)^2\, d^3(x,y,z)$$

das Trägheitsmoment von K um die Achse l.
Finde den Ellipsoiden

$$E = \left\{ (x,y,z) \,|\, (\frac{x}{r_1})^2 + (\frac{y}{r_2})^2 + (\frac{z}{r_3})^2 \le 1 \right\},$$

der dieselben Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z jeweils um x-, y- und z-Achse hat.

3. a) Es sei $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve parametrisiert durch $\gamma(u) = \big(f(u), g(u)\big)$ mit $|\dot\gamma(u)| = 1$ und $f(u) > 0$ f.a. $0 \le u \le L$. $\gamma_{[0,L)}$ sei injektiv und $\gamma(0) = \gamma(L)$. Betrachte γ als in der x-z-Ebene liegend.
Sei F die Rotationsfläche, die durch Rotation von γ um die z-Achse entsteht. Gib eine möglichst einfache Formel für den Flächeninhalt von F.

b) Berechne den Flächeninhalt von

$$T_{a,b} = \left\{ (x,y,z) \,|\, \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2 \right\}, \quad 0 < a < b\,.$$

4. Sei $f(u,v)$ ein parametrisiertes Flächenstück $f\colon R^2 \supset G \to \mathbb{R}^3$ und $\phi(x,y) = (u,v)$ eine Koordinatentransformation, also $\tilde f(x,y) = (f \circ \phi)(x,y)$. Zeige: Das Flächenelement

$$d^2S \;=\; |f_u \times f_v|\, d^2(u,v)$$

ist invariant unter Koordinatentransformation, also $d^2S = d^2\tilde S$, mit

$$d^2\tilde S \;=\; |\tilde f_x \times \tilde f_y|\, d^2(x,y)\,.$$

Hinweis: Zeige zuerst die Identität $|f_u \times f_v|^2 = EG - F^2$ mit

$$E = \langle f_u, f_u\rangle, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle\,.$$

Rückgabe: In den Übungsgruppe am 7.11. bzw. 8.11.