Serie 2

1. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung aller zur (y, z)-Ebene parallelen Kreisscheiben vom Radius 1, deren Mittelpunkte in der (x, z)-Ebene auf der Kurve $z = \cos x$ liegen ($0 \leq x \leq \pi$). Berechne

$$\int_K \big((z - \cos x)^2 + y^2\big)\, d^3(x, y, z)\,.$$

2. In der (x, z)-Ebene begrenzen die Parabel $z = x^2 + 1$ und die Gerade $z = 2$ ein Flächenstück F. Lässt man F um die x-Achse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper $R \subset \mathbb{R}^3$. Berechne

$$\int_R \frac{x}{y^2 + z^2}\, d^3(x, y, z)\,.$$

3. **a)** Es sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation $T(x) = Ax + b$, $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\det A \neq 0$. Zeige: Ist S der Schwerpunkt einer kompakten Jordan-messbaren Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen $v_n(K) > 0$, so ist der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$ durch den Bildpunkt $T(S)$ gegeben.

b) Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus zu den Parametern $0 < a < b$.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 \leq a^2\}\,.$$

Berechne das Trägheitsmoment $\int_V (x^2 + y^2)\, d^3(x, y, z)$.

4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Menge der rationalen Punkte im 2-dimensionalen Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit I_n das kompakte Quadrat mit Mittelpunkt x_n und Kantenlänge 2^{-n}. Sei nun V die abzählbare Vereinigung der offenen Quadrate

$$V = \mathring{I}_1 \cup \mathring{I}_2 \cup \ldots\,.$$

Dies ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige: V ist beschränkt und offen.

b) Zeige: $\underline{\int}_V 1\, d^2(x, y) \leq \frac{1}{3}$.

c) Zeige: $\overline{\int}_V 1\, d^2(x, y) \geq 1$.

d) Folgere: V ist nicht Jordan-messbar.

Rückgabe: In der Übungsgruppe am 1.11. bzw. in der Vorlesung am 2.11.