Serie 1

1. **a)** Berechne das Volumen von $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \le 1,\ |z| \le 2 \}$.

b) Berechne das Volumen von $\{ (x, y, z) \mid z \ge x^2 + y^2,\ x + y + z \le 1 \}$.

c) Berechne das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge l.

2. **a)** Integriere die Funktion $x^n y^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, über die Kreisscheibe $\{ x^2 + y^2 \le r^2 \}$ und das Quadrat $[0, 1]^2$.

b) Integriere die Funktion z^2 über die Kugel $\{ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \}$.

3. Der Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positiven Volumen V ist definiert durch den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i = \frac{1}{V} \int_K x_i d^n x, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Berechne den Schwerpunkt

a) von $\{ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0 \}$.

b) eines Kegels $K(B, h) = \{ (x, z) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le z \le h,\ x \in (1 - \frac{z}{h})B \}$.

4. Es sei $C \subset \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, die eine Dezimalbruchdarstellung besitzen, in welcher die Ziffer 5 nicht vorkommt. Zeige:

a) C ist eine 1-dimensionale Nullmenge.

b) C lässt sich bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbilden.

Rückgabe: In der jeweiligen Übungsgruppe, 24.10. bzw. 25.10.