Serie 6

1. Betrachte den Folgenraum $l_p(\mathbb{C}) = \{ (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \}$ mit der Norm $\|(x_n)\|_p = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ und l_∞ der Vektorraum der beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

a) *Zeige*: Für alle $p, q \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ gilt *(2 Punkte)*

$$p \le q \quad \Rightarrow l_p \subset l_q \text{ und } \|x\|_q \le \|x\|_p \text{ f.a. } x \in l_p\,.$$

b) *Zeige*: Keine zwei der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ auf l_1 sind äquivalent. *(2 Punkte)*

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) **(L)** Für $\emptyset \ne A \subset X$ und $x \in X$ ist der Abstand von x zu A definiert durch

$$d(x, A) := \inf\{ d(x, a) \mid a \in A \}\,.$$

Zeige: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$. *(2 Punkte)*

b) **(L)** Für nichtleere Mengen $A, B \subset X$ ist der Abstand von A nach B definiert durch $d(A, B) = \inf\{ d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}$. *Beweise oder widerlege*: Sind A, B abgeschlossen in X und disjunkt, so ist $d(A, B) > 0$. *(2 Punkte)*

3. Entscheide, ob folgende metrische Räume vollständig sind und beweise dies:

a) **(L)** $C^1([-1,1], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. *(2 Punkte)*

b) **(L)** $C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig und beschränkt} \}$ mit der Supremumsnorm. *(2 Punkte)*

c) **(L)** $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$ mit einer durch eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik. *(1 Punkt)*

4. Ist $\{ (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists\, n_o \in \mathbb{N} \text{ s.d. } x_n = 0 \text{ f.a. } n \ge n_o \}$ in l_2 bzgl. $\|\cdot\|_2$ abgeschlossen? Begründe!. *(2 Punkte)*

Rückgabe: Montag, 25.05.09 in den Briefkästen bis 15.00 Uhr