Die Konstruktion regulärer n-Ecke

Axel Schüler

Grimma, 14. September 2007

Gliederung

I. Die Quadratur des Kreises und das Delische Problem

II. Die zwei Konstruktionsaufgaben

III. Geschichtliches zum regulären n-Eck

IV. Das 5-Eck und das 10-Eck

V. Übergang von n zu $2n$ und von p und q zu pq

VI. Das 15-Eck

VII. Grundrechenarten mit Strecken

VIII. Fermat-Primzahlen — Die Lösung des Problems

Die Quadratur des Kreises und das Delische Problem

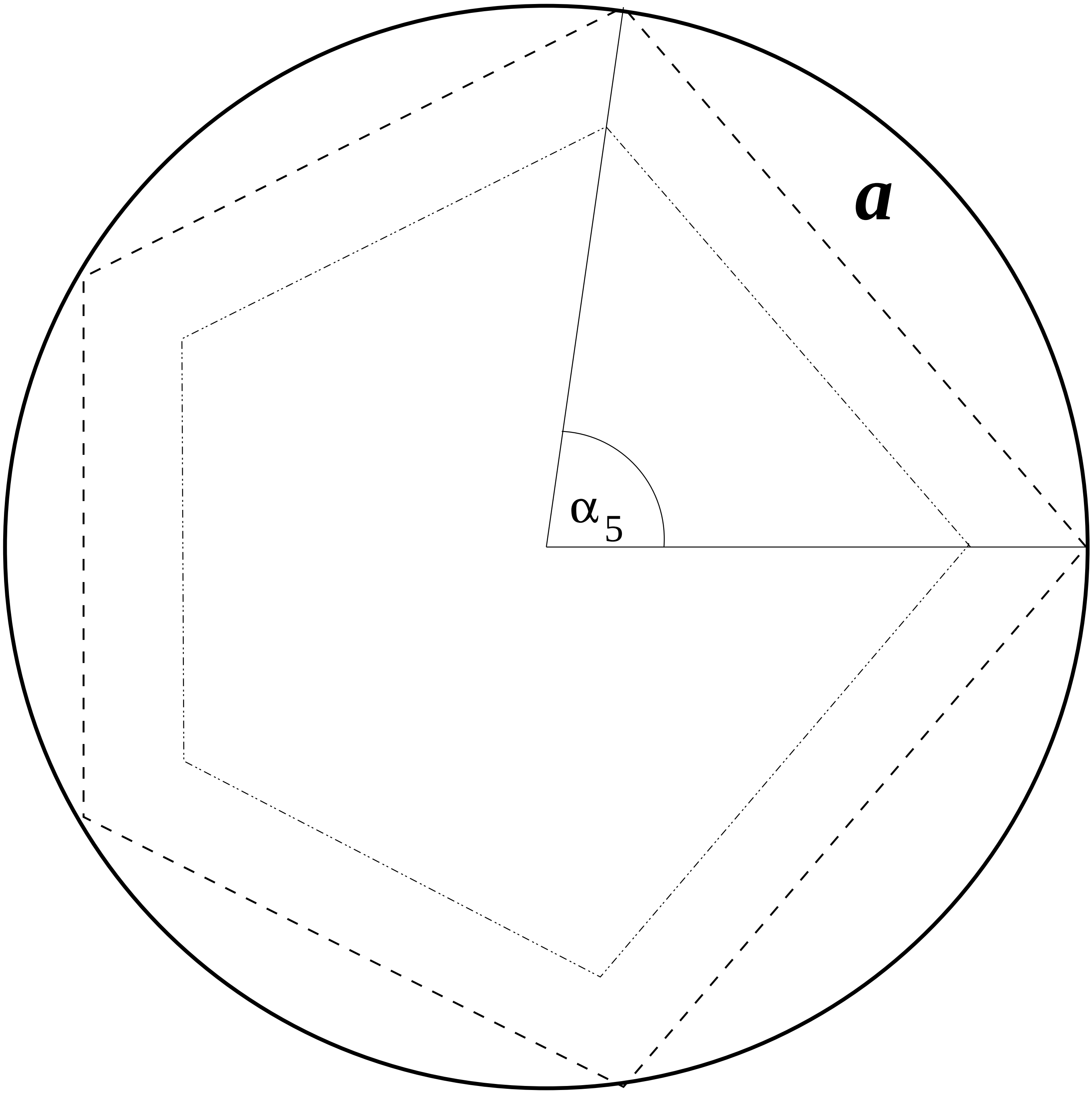
Quadratur des Kreises. Gegeben sei ein Kreis von Radius r. Gesucht ist ein Quadrat der Seitenlänge x mit gleichem Flächeninhalt.

Algebraisch lässt sich dieses Problem Sofort lösen: $\pi r^2 = x^2$ liefert $x = \sqrt{\pi}\, r$.

Delisches Problem (Würfelverdopplung). Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge a. Man konstruiere die Kantenlänge x eines Würfels mit doppeltem Volumen.

Algebraisch ist die Lösung klar: $2a^3 = x^3$ liefert nach Wurzelziehen $x = \sqrt[3]{2}\, a$.

Das Problem liegt darin, dass die Zahlen $\sqrt{\pi}$ und $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal bei gegebener Einheitsstrecke nicht konstruierbar sind. Dies wurde von Galois (1811 – 1832) und Abel (1802 – 1829) gezeigt.


a
α5

Die zwei Konstruktionsaufgaben

Ein n-Eck heißt *regulär* (oder *regelmäßig*), wenn alle seine Seiten gleichlang und alle Innenwinkel gleichgroß sind. Reguläre n-Ecke haben In- und Umkreise.

Aufgabe 1. Zu gegebener Seitenlänge a konstruiere man ein reguläres n-Eck mit genau dieser Seitenlänge.

Aufgabe 2. Einem gegebenen Kreis ist ein reguläres n-Eck einzubeschreiben.

Beide Aufgaben sind äquivalent, denn wenn man Aufgabe 2 erledigt hat, dann kann man durch zentrische Streckung auch Aufgabe 1 mit beliebigem a konstruieren. Wir beschränken uns hier auf die Aufgabe 2. Diese ist gelöst, wenn wir es schaffen, den zugehörigen Zentriwinkel

$$\alpha_n = \angle P_1 M P_1 = \frac{360^\circ}{n}$$

zu konstruieren. Hierbei ist M der Mittelpunkt des vorgegebenen Kreises und P_1 und P_2 sind benachbarte Eckpunkte des n-Ecks. Wir haben die folgenden Winkel zu konstruieren:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
α_n	120°	90°	72°	60°	$51,43^\circ$	45°	40°	36°

Geschichtliches zum regulären n-Eck

Im Juni 1796 konnte man in dem in Jena erscheinenden „Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung“ unter der Rubrik „Neue Entdeckungen“ lesen:

> Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdopplung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

> Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerm Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden.
> C. F. Gauß aus Braunschweig. Stud. der Mathematik zu Göttingen.
>
> Es verdient angemerkt zu werden, dass Herr Gauß jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolge der Philosophie und der klassischen Literatur als der höheren Mathematik gewidmet hat.

Dies war die erste Veröffentlichung von Gauß.

Die zugehörigen Zentriwinkel und ihre Kosinus — Der Primzahlfall

Die Konstruierbarkeit von Dreieck, Fünfeck und Siebzehneck liegt im Wesentlichen daran, dass sich die Kosinus der entsprechenden Zentriwinkel α_n, $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$, für $n = 3, 5, 17$ durch Quadratwurzeln ausdrücken lassen.

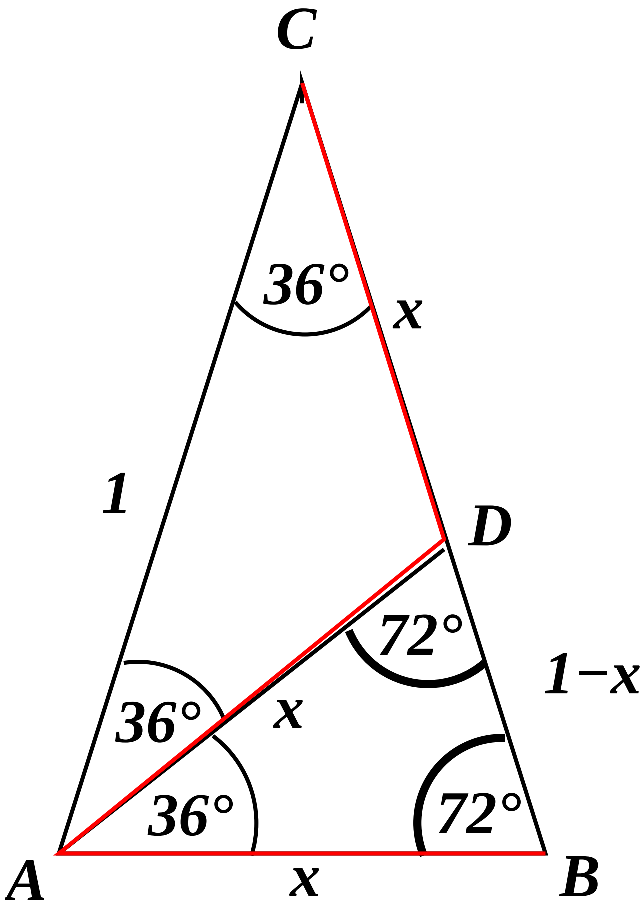
$$\cos\frac{360^\circ}{3} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{360^\circ}{5} = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

Schließlich gilt

$$\cos\frac{360^\circ}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\ + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Das 5-Eck und das 10-Eck

Zunächst wird mit Hilfe des Höhensatzes erklärt, wie man aus 1 und a die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ konstruiert.
Die Konstruktion des regulären 10-Ecks basiert auf der Konstruktion des unten-stehenden gleichschenkligen Dreiecks Dreiecks ABC mit Basiswinkeln gleich $72°$.



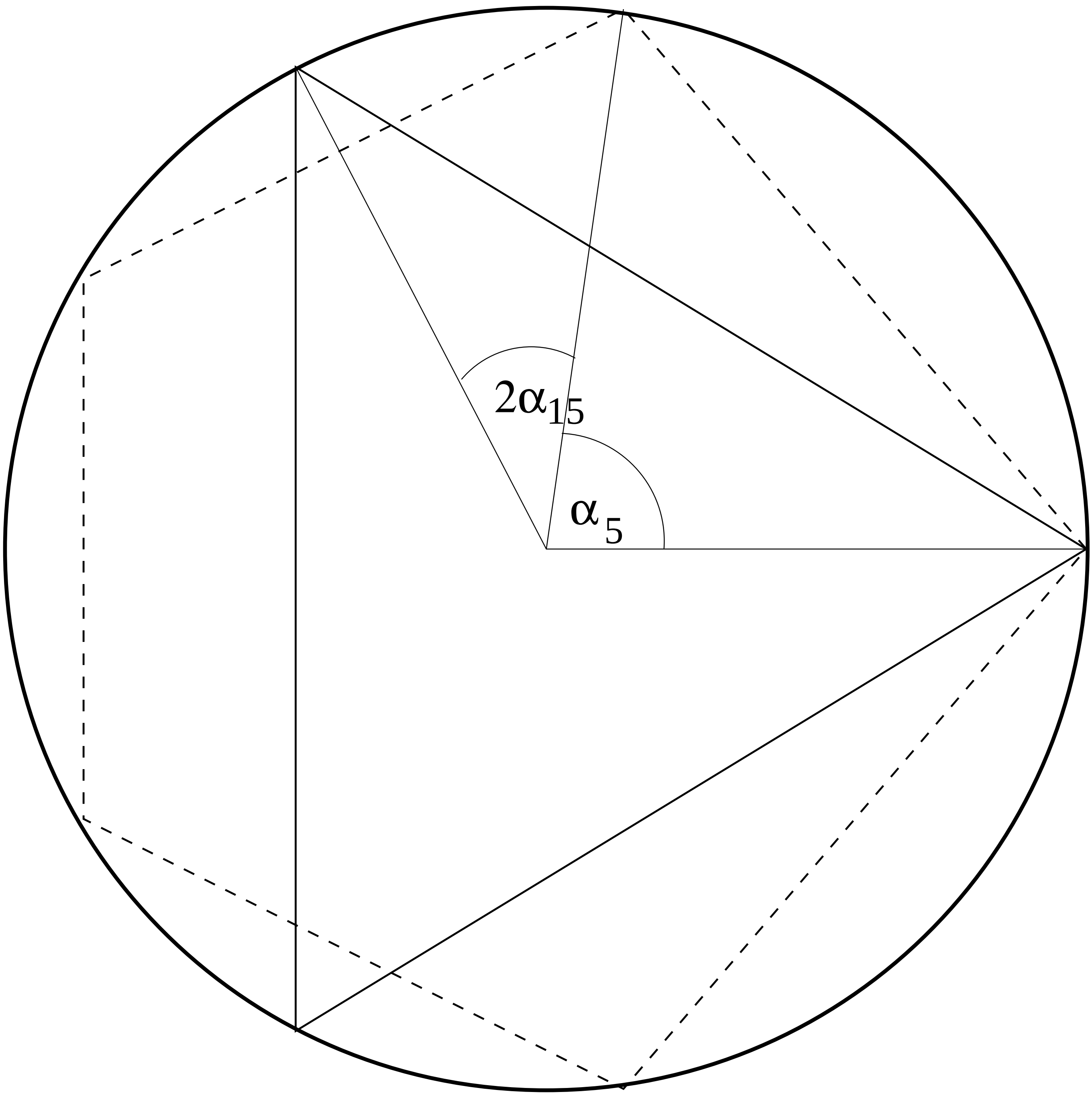
Ähnlichkeit: ABC ~ BDA

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

$$x^2 = 1-x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$


$2\alpha_{15}$
α_5

Zusammengesetzte Zahlen

(a) Ist das reguläre n-Eck konstruierbar, so auch das reguläre $2n$-Eck, denn

$$\alpha_{2n} = \frac{\alpha_n}{2}$$

und die Halbierung eines Winkels ist konstruierbar.

(b) Sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen, so gibt es ganze Zahlen a, b mit $1 = ap + bq$. Dividiert man diese Gleichung durch pq und multipliziert mit 360°, so hat man

$$\alpha_{pq} = \frac{360^\circ}{pq} = a\frac{360^\circ}{q} + b\frac{360^\circ}{p} = a\,\alpha_q + b\alpha_p.$$

Sind also die regulären p und q-Ecke konstruierbar, so auch das reguläre pq-Eck.

Das endgültige Resultat

Das reguläre n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n die Form

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_r$$

hat, wobei k und r beliebige nichtnegative ganze Zahlen sind und die p_i, $i = 1, \cdots, r$ sind paarweise voneinander verschiedene Primzahlen der Form

$$p = 2^{2^q} + 1.$$

Die Folge der konstruierbaren n-Ecke lautet also

$$(3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, \cdots, 257, \cdots).$$

Primzahlen dieser Form heißen *Fermat*sche Primzahlen. Die einzig bisher bekannten Fermatschen Primzahlen ergeben sich für

$$q = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{und es sind} \quad p = 3, 5, 17, 257, 65537.$$