Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Eine Innere-Punkte-Methode zur Lösung linearer Optimierungsprobleme: Variante 1.

Aufgabenstellung

Zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen

$$c^T x = \min \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax = b,\ x \geq 0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit vollem Zeilenrang, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$, soll folgende Innere-Punkte-Methode implementiert werden. Ausgehend von Startdaten $w = (x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mit $x, s > 0$, etwa $x = s = e = (1, \ldots, 1)^T$, bestimmt man eine Korrekturrichtung $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \sigma\mu e \end{bmatrix},$$

wobei $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, $S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$, $\mu = \frac{1}{n} x^T s$ sowie $\sigma \in (0, 1)$. Die neue Näherung

$$\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) = w + \alpha \Delta w$$

erhält man dadurch, daß man $\alpha \in (0, 1]$ so wählt, daß $\tilde{x}, \tilde{s} > 0$ sowie

$$\tilde{x}_i \tilde{s}_i \geq \frac{\gamma}{n} \tilde{x}^T \tilde{s}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

etwa mit $\gamma = 10^{-3}$. Man iteriert dann, bis $\|\Delta w\|_2$ hinreichend klein ist.
Man teste die Implementierung an einer Reihe von Problemen unterschiedlicher Größe. Außerdem experimentiere man mit verschiedenen Wahlen von σ (etwa $\sigma = 0.5$ konstant oder $\sigma \to 0$ während der Iteration) und deren Auswirkung auf die Effizienz des Verfahrens.

Quellen

$\emptyset$