

Arbeitsblatt  
**Numerisches Praktikum**

**Thema**

Vergleich zweier Verfahren zum Fitten von Punkten mittels eines Kreises.

**Aufgabenstellung**

Die Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  sollen bestmöglich durch einen Kreis approximiert werden. Ein Kreis in allgemeiner Lage wird beschrieben durch die Menge der Lösungen  $(x, y)$  der skalaren Gleichung  $f(x, y; r, x_0, y_0) = 0$  gegeben durch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Dabei bezeichnet  $r$  den Radius und  $(x_0, y_0)$  die Koordinaten des Mittelpunkts. Gesucht ist nun ein Kreis mit

$$\|F(r, x_0, y_0)\|_2 = \min!,$$

wobei

$$F_i(r, x_0, y_0) = f(x_i, y_i; r, x_0, y_0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Das so entstehende nichtlineare Ausgleichsproblem der Form  $\|F(w)\|_2 = \min!$  kann mit dem sogenannten Gauß-Newton-Verfahren

$$w^{m+1} = w^m + \Delta w^m, \quad \|F(w^m) + F_w(w^m)\Delta w^m\|_2 = \min!$$

bestimmt werden.

Man implementiere das Gauß-Newton-Verfahren, indem man das in jedem Iterationsschritt anfallende lineare Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung löst. Außerdem implementiere man das in

SPÄTH: Least-Squares Fitting by Circles, Computing 57, 179-185 (1996)

beschriebene Verfahren. Man vergleiche die beiden Verfahren anhand der vier in den Quellen genannten Datensätzen sowie an weiteren Beispielen.

**Quellen**

Die zu verwendenden Datensätze findet man unter

<http://www.math.uni-leipzig.de/~kunkel/numprak/daten/ellipsek.txt>

für  $k = 1, 2, 3, 4$ . Dabei steht in der ersten Zeile jeweils die Anzahl  $n$  der Datensätze und in den darauf folgenden  $n$  Zeilen die Werte  $x_i, y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .