Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2021/22

Arbeitsblatt

Numerisches Praktikum

Thema

Vergleich dreier Methoden zur Orthonormalisierung von Vektoren und deren Anwendung auf lineare Ausgleichsprobleme.

Aufgabenstellung

Die Spalten der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ seien linear unabhängig. Zur Bestimmung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{Bild} A$ kann man das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren verwenden. Weitere Möglichkeiten sind das modifizierte Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren sowie die Verwendung von Householder-Transformationen. Allen drei Verfahren ist gemeinsam, daß sie eine Faktorisierung der Form $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$, $Q^TQ = I$, und $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ bestimmen. Hat man eine solche Faktorisierung vorliegen, so kann man damit das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 = \min!$ mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^m$ und gesuchtem $x \in \mathbb{R}^n$ lösen. Dabei beachtet man, daß die Lösung x der Normalgleichung

$$A^TAx = A^Tb$$

genügt. Setzt man die obige Zerlegung ein, und beachtet, daß R gemäß der Voraussetzungen nichtsingulär ist, so erhält man $R^TQ^TQRx = R^TQ^Tb$ bzw.

$$Rx = Q^Tb$$

und x löst ein lineares Gleichungssystem mit einer nichtsingulären oberen Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix. Insbesondere erhält man x durch zugehörige Rückwärtssubstitution.
Man implementiere die drei genannten Orthonormalisierungsverfahren und das darauf aufbauende Verfahren zur Lösung von linearen Ausgleichsproblemen und teste die Implementierung unter anderem für

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \\ b &= (b_i), \quad b_i = a_{i1} + 2a_{i2} + \cdots + na_{in}. \end{aligned}$$

Quellen

$\emptyset$