Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Numerische Optimierung

Modell 1

Insgesamt gibt es 7 Investitions- und 6 Finanzierungsmöglichkeiten. Deren Größe in k€ sei mit x_i, $i = 1, \ldots, 13$, bezeichnet.

`I1`	x_1	$0 \leq x_1 \leq 50$
`I2`	x_2	$0 \leq x_2 \leq 100$
`I3`	x_3	$0 \leq x_3 \leq 40$
`I4`	x_4, x_5, x_6, x_7	$x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$
`F1`	x_8	$0 \leq x_8 \leq 50$
`F2`	x_9	$0 \leq x_9 \leq 80$
`F3`	$x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$	$x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0$

Bezeichne K_j den Kapitalbestand und I_j den Investitionsumfang des j-ten Jahres sowie G den Gewinn am Ende des Zeitraums, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_1 &= x_1 + x_2 + x_4 - x_8 - x_{10}, \\
K_2 &= 0.06x_1 + 0.05x_2 + 1.04x_4 - 0.05x_8 - 1.08x_{10} + K_1 - I_1, \\
I_2 &= x_5 - x_9 - x_{11}, \\
K_3 &= 0.06x_1 + 0.55x_2 + 1.04x_5 - 0.05x_8 - 1.08x_{11} + K_2 - I_2, \\
I_3 &= x_3 + x_6 - x_{12}, \\
K_4 &= 0.06x_1 + 0.025x_2 + 0.25x_3 + 1.04x_6 - 1.05x_8 - 1.08x_{12} + K_3 - I_3, \\
I_4 &= x_7 - x_{13}, \\
G &= 1.06x_1 + 0.525x_2 + x_3 + 1.04x_7 - 0.3125x_9 - 1.08x_{13} + K_4 - I_4 - K_0
\end{aligned}$$

mit den Beschränkungen

$$I_j \leq K_j,\ j = 1, \ldots, 4, \quad K_1 = 30.$$

Damit erhält man ein lineares Optimierungsproblem der Form

$$G = c^T x \to \max! \quad \text{s. t.} \quad Ax \leq b,\ 0 \leq x \leq u$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0.94 & 0.95 & 0 & -0.04 & 1 & 0 & 0 & -0.95 & -1 & 0.08 & -1 & 0 & 0 & 30 \\ 0.88 & 0.4 & 1 & -0.04 & -0.04 & 1 & 0 & -0.9 & -1 & 0.08 & 0.08 & -1 & 0 & 30 \\ 0.82 & 0.375 & 0.75 & -0.04 & -0.04 & -0.04 & 1 & 0.15 & -1 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -1 & 30 \\ 0.24 & 0.15 & 0.25 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & -0.15 & -0.3125 & -0.08 & -0.08 & -0.08 & -0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

und u entsprechend der oben angegebenen Beschränkungen (wobei formal $u_i = \infty$ für nach oben unbeschränktes x_i zu setzen wäre).