Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Numerische Optimierung

Ergänzung 1

Beispiel 7.11
Zu lösen sei

$$
\begin{aligned}
q(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-2.5)^2 \to \min \quad \text{s. t.} \qquad & G = 2I, \quad d = (-2,-5)^T, \\
x_1 - 2x_2 + 2 \geq 0, \qquad & a_1 = (1,-2)^T, \\
-x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0, \qquad & a_2 = (-1,-2)^T, \\
-x_1 + 2x_2 + 2 \geq 0, \qquad & a_3 = (-1,2)^T, \\
x_1 \geq 0, \qquad & a_4 = (1,0)^T, \\
x_2 \geq 0, \qquad & a_5 = (0,1)^T.
\end{aligned}
$$

Sei $x_0 = (2,0)^T$. Dann ist $\mathcal{W}_0 = \{3,5\}$. Außerdem ist $p^0 = (0,0)^T$, da a_3, a_5 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Aus

$$
a_3\hat{\lambda}_3 + a_5\hat{\lambda}_5 = G\hat{x} + d \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}
$$

erhält man $\hat{\lambda}_3 = -2$, $\hat{\lambda}_5 = -1$ und damit $x^1 = x^0 = (2,0)^T$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_0 \setminus \{3\} = \{5\}$.
Wegen $g^1 = Gx^1 + d = (2,-5)^T$ ist jetzt zu lösen

$$
p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 - 5p_2 \to \min \quad \text{s. t.} \quad p_2 = 0
$$

bzw. $p_2^2 + 2p_1 \to \min$. Man erhält $p^1 = (-1,0)^T$. Offensichtlich ist $\alpha_1 = 1$ und damit $x^2 = x^1 + \alpha_1 p^1 = (1,0)^T$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 = \{5\}$.
Wegen $g^2 = Gx^2 + d = (0,-5)^T$ ist jetzt zu lösen

$$
p_1^2 + p_2^2 - 5p_2 \to \min \quad \text{s. t.} \quad p_2 = 0.
$$

Man erhält sofort $p_2 = (0,0)^T$ und aus

$$a_5 \hat{\lambda}_5 = G\hat{x} + d \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

dann $\hat{\lambda}_5 = -5$. Es ist damit $x^3 = x^2 = (1,0)^T$, $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 \setminus \{5\} = \emptyset$.
Wegen $g^3 = g^2 = (0,-5)^T$ ist jetzt das unbeschränkte Problem

$$p_1^2 + p_2^2 - 5p_2 \to \min$$

zu lösen. Man erhält $p^3 = (0, 2.5)^T$. Aus (7.19) ergibt sich $\alpha_3 = 0.6$, vgl. Skizze, mit der blockierenden Bedingung $j = 1$, d. h. $x^4 = x^2 + \alpha_3 p^3 = (1, 1.5)^T$, $\mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_3 \cup \{1\} = \{1\}$.
Wegen $g^4 = Gx^4 + d = (0,-2)^T$ ist jetzt zu lösen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ \hat{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich $p_4 = (0.4, 0.2)^T$, $\hat{\lambda}_1 = 0.8$. Offensichtlich ist $\alpha_4 = 1$ und damit $x^5 = x^4 + \alpha_4 p^4 = (1.4, 1.7)^T$, $\mathcal{W}_5 = \mathcal{W}_4 = \{1\}$.
Wegen $g^5 = Gx^5 + d = (0.8, -1.6)^T$ ist schließlich zu lösen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ \hat{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -1.6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich $p_5 = (0,0)^T$, $\hat{\lambda}_1 = 0.8$. Wegen $\hat{\lambda}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{W}_5$ sind wir fertig.

$\square$