Prof. Dr. Peter Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

WS 2022/23

Übungen zur Vorlesung

Numerik 2

(37) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = Jx$$

mit

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

(38) Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und

$$\mu = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle Av, v \rangle_2}{\langle v, v \rangle_2}.$$

Man zeige, daß dann gilt

$$\mu = \lambda_{\max}(\tfrac{1}{2}(A^T + A)).$$

(39) Seien A und μ wie in Aufgabe 38. Für $h > 0$ mit $h\mu < 1$ zeige man die Abschätzung

$$\|(I - hA)^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - h\mu}.$$

(40) Seien $A \in \mathbb{R}^{s,s}$ und $b, c \in \mathbb{R}^s$ so gegeben, daß das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch ist. Man zeige, daß für die zugehörige Stabilitätsfunktion

$$R(-z) = R(z)^{-1}$$

gilt.

Abgabe am Donnerstag, 05.01.2023, 10:45 Uhr