

Übungen zur Vorlesung
Numerik 2

- (25) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf \mathbb{C}^n und $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ nichtsingulär. Man zeige, daß dann durch $\|x\|_S = \|Sx\|$ eine weitere Vektornorm auf \mathbb{C}^n definiert wird. Wie hängt die zugehörige durch

$$\|A\|_S = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_S}$$

definierte Operatornorm für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit der zu $\|\cdot\|$ gehörigen Operatornorm zusammen?

- (26) Sei $\varrho(A)$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Man zeige:
- (a) Für jede Operatornorm $\|\cdot\|$ gilt $\varrho(A) \leq \|A\|$.
 - (b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Operatornorm $\|\cdot\|$ mit $\|A\| \leq \varrho(A) + \varepsilon$.
Hinweis: Man transformiere zunächst auf Jordansche Normalform und verwende dann eine Ähnlichkeitstransformation mit $\text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$.
Außerdem beachte man Aufgabe 25.

- (27) Man prüfe, ob das Mehrschrittverfahren

$$x_4 - x_0 = \frac{h}{3}(8f(t_3, x_3) - 4f(t_2, x_2) + 8f(t_1, x_1))$$

konvergent ist.

- (28) Gegeben sei ein Polynom ϱ vom Grad k mit $\varrho(1) = 0$. Man zeige, daß dazu ein eindeutig bestimmtes Polynom σ vom Grad höchstens k derart existiert, daß das zugehörige Mehrschrittverfahren mindestens die Ordnung $k + 1$ besitzt.

Abgabe am Donnerstag, 01.12.2022, 10:45 Uhr