Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(49) Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{D}, \mathbb{R})$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ offen, und $x^* \in \mathbb{D}$ Fixpunkt von φ mit $|\varphi'(x^*)| \neq 1$. Man zeige: Ist das durch

$$x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu)$$

gegebene Iterationsverfahren für x^* nicht lokal konvergent, so besitzt φ in einer Umgebung von x^* eine Inverse φ^{-1} und das durch

$$x_{\nu+1} = \varphi^{-1}(x_\nu)$$

gegebene Iterationsverfahren ist für x^* lokal konvergent. (3 Punkte)

(50) Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \cos x$.

(a) Man zeige, daß die durch

$$x_{\nu+1} = \cos x_\nu$$

erzeugte Folge für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt x^* von φ konvergiert.

(b) Man bestimme ν derart, daß ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ die Abschätzung $|x^* - x_\nu| \leq 10^{-3}$ garantiert werden kann.

(c) Man führe fünf Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ durch und schätze den Fehler $|x^* - x_5|$ auf der Basis der berechneten Werte ab. (5 Punkte)

(51) Gegeben sei eine Folge $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit $x_\nu \to x^*$ und $x_\nu \neq x^*$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Außerdem sei

$$x^* - x_{\nu+1} = (\kappa + \delta_\nu)(x^* - x_\nu), \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

mit $|\kappa| < 1$ und $\delta_\nu \to 0$.

(a) Man zeige, daß für hinreichend großes ν durch

$$\bar{x}_\nu = x_\nu - \frac{(\Delta x_\nu)^2}{\Delta^2 x_\nu}$$

mit $\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$ eine Folge definiert wird, für die

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{x^* - \bar{x}_\nu}{x^* - x_\nu} = 0$$

gilt (sogenannte Δ^2-Methode von Aitken).

(Hinweis: Es gilt $\Delta^2 x_\nu = x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu\,!$)

(b) Man programmiere die Δ^2-Methode von Aitken und berechne damit den Grenzwert x^* der Folge $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$x_{\nu+1} = -e^{x_\nu}, \quad x_0 = -0.5.$$

(3 Punkte)

(52) Gegeben sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $f(a)f(b) < 0$ sowie eine Toleranz $\texttt{TOL} > 0$. Zur Bestimmung einer Nullstelle von f in $[a,b]$ implementiere man sowohl die regula falsi als auch das Sekantenverfahren, jeweils mit einer passend gewählten Abbrechbedingung unter Einbeziehung von `TOL`. Man wende diese an auf

(a) $f(x) = \exp(x) + x,\ a = -1,\ b = 0,$

(b) $f(x) = \cos(x) - x,\ a = 0,\ b = 1,$

(c) $f(x) = x^2 - 2,\ a = 1,\ b = 2,$

mit $\texttt{TOL} = 10^{-6}, 10^{-12}$ und vergleiche die Anzahl der benötigten Iterationen.

(6 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 07.07.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung