Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig SS 2022

Übungen zur Vorlesung
Numerik 1

(45) Jeder Wert $P_{k,l}$, den man bei der Romberg-Quadratur mit Hilfe des Verfahrens von Aitken/Neville berechnet, stellt das Ergebnis einer Quadraturformel dar. Man zeige:

(a) Die Einträge $P_{k,1}$, $k = 0, \ldots, N-1$, entsprechen der summierten Simpson-Regel.

(b) Man erhält $P_{k,l}$ durch 2^k-maliges Anwenden der zu $P_{0,l}$ gehörigen Quadraturformel auf entsprechende Teilintervalle.

(c) Für die Gewichte b_{i,n_l}, $i = 0, \ldots, n_l$, der zu $P_{0,l}$ gehörigen Quadraturformel gilt

$$\max_{i=0,\ldots,n_l} b_{i,n_l} \leq 4^l \min_{i=0,\ldots,n_l} b_{i,n_l}.$$

(d) Es gilt $b_{i,n_l} > 0$ für $i = 0, \ldots, n_l$.

(8 Punkte)

(46) Man implementiere die summierte Simpson-Regel zur Berechnung von

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

bei Verwendung von $m = 2^i$, $i = 1, \ldots, 9$, gleichgroßen Teilintervallen. Wie verhalten sich dabei die Fehler? (4 Punkte)

(47) Man zeige, daß die Polynome p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$p_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k (t^2-1)^k,$$

normiert und vom Grad k sind, d. h. $p_k \in \tilde{\Pi}_k$, und daß sie orthogonal bezüglich des durch

$$(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$$

definierten Skalarproduktes sind.
(Hinweis: Man verwende zum Beweis der zweiten Behauptung partielle Integration!)

(4 Punkte)

(48) Man zeige, daß die in Aufgabe 33 definierten Polynome $T_k \in \tilde{\Pi}_k,\ k \in \mathbb{N}$, orthogonal bezüglich des durch

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) g(t)\, dt$$

definierten Skalarproduktes sind.

(3 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 30.06.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung