Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(37) Sei s_j, $j = 0, \ldots, n$, der zu $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$, $h > 0$, gehörige natürliche kubische Spline mit

$$s_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Man zeige: Für die zu s_j, $j = 2, \ldots, n-2$, gehörigen Größen c_i, $i = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$c_i = \begin{cases} -\frac{1}{\varrho_i} c_{i+1} & \text{für } i = 1, \ldots, j-2, \\ \frac{1}{\varrho_{j-1}} (\frac{6}{h^2} - c_j) & \text{für } i = j-1, \\ -\frac{6}{h^2} \frac{2+1/\varrho_{j-1}+1/\varrho_{n-j-1}}{4-1/\varrho_{j-1}-1/\varrho_{n-j-1}} & \text{für } i = j, \\ \frac{1}{\varrho_{n-j-1}} (\frac{6}{h^2} - c_j) & \text{für } i = j+1, \\ -\frac{1}{\varrho_{n-i}} c_{i-1} & \text{für } i = j+2, \ldots, n-1, \end{cases}$$

mit Zahlen ϱ_i definiert durch $\varrho_{i+1} = 4 - 1/\varrho_i$, $i \in \mathbb{N}$, $\varrho_1 = 4$. (6 Punkte)

(38) Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 37 zeige man:

(a) Die Folge $\{\varrho_i\}$ ist streng monoton fallend und gemäß $2 + \sqrt{3} < \varrho_i \leq 4$, $i \in \mathbb{N}$, beschränkt.

(b) Für $j = 2, \ldots, n-2$ und $t \in [t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \ldots, j-1$ bzw. $t \in [t_i, t_{i+1}]$ für $i = j+1, \ldots, n-1$ gilt

$$|s_j(t)| \leq \frac{h^2}{8} |c_i|.$$

Was bedeuten diese Resultate für Störungen Δy des Funktionswertes $s(t)$ eines natürlichen kubischen Splines mit $s(t_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$, bei Störungen Δf_j von f_j? (5 Punkte)

(39) Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ entsprechend

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ & & c_n & d_n \end{pmatrix},$$

von der bekannt sei, daß bei der Gauß-Elimination kein Zeilentausch nötig ist. Mit dem Ansatz

$$A = L \cdot R,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & r_n \end{pmatrix},$$

entwickle man einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung von

$$l_i,\ i = 2, \ldots, n, \quad r_i,\ i = 1, \ldots, n, \quad s_i,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Wieviele Operationen benötigt dieser Algorithmus in erster Näherung?

(3 Punkte)

(40) Man schreibe ein Unterprogramm zur Bestimmung der natürlichen Spline-Interpolierenden s unter Verwendung von Aufgabe 39 sowie ein Unterprogramm zur Auswertung von s an einer Stelle $\bar{t}$. Mit Hilfe dieser Unterprogramme bestimme man den zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = (1 + t^2)^{-1}$ gehörigen natürlichen Spline s für die äquidistante Knoten entsprechend $t_i = -5 + i/2$, $i = 0, \ldots, 20$ sowie die durch

$$E = \max_{\substack{t=-5+i/200 \\ i=0,\ldots,2000}} |f(t) - p(t)|$$

gegebene Schätzung des Interpolationsfehlers. Wo tritt der maximale Fehler auf? Man interpretiere die Ergebnisse. Man vergleiche außerdem mit den Resultaten bei Verwendung von Polynom-Interpolation. (5 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 16.06.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung