Prof. Dr. P. Kunkel
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

SS 2022

Übungen zur Vorlesung

Numerik 1

(5) In Ergänzung zur Aussage von Lemma 1.9 zeige man für ungerades b, daß

$$|x - \mathrm{fl}(x)| \leq \frac{b+1}{2b} b^{-l+1} |x| \,.$$

(3 Punkte)

(6) Man zeige, daß auf einem idealen Rechner mit geradem b

$$\mathrm{eps} = \min\{x \in \mathbb{M}_{b,l} \mid 1 \oplus x > 1\}$$

gilt. Außerdem verallgemeinere man das in Algorithmus 1.13 für $b = 2$ angegebene Verfahren, um die Maschinengenauigkeit eps und damit die Mantissenlänge l in der Arithmetik von $\mathbb{M}_{b,l}$ bei bekanntem (geradem) b zu bestimmen. Schließlich bestimme man mit Algorithmus 1.13 unter der Annahme, daß $b = 2$ gilt, die Maschinengenauigkeit auf einem tatsächlichen Rechner.

(3 Punkte)

(7) Man zeige, daß die Addition in $\mathbb{M}_{b,l}$ nicht assoziativ ist. (5 Punkte)

(8) Zur Berechnung von Werten der Exponentialfunktion kann man deren Darstellung als Reihe

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

verwenden. Man implementiere einen entsprechenden Algorithmus, indem man solange summiert, bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert. Man teste das Programm für $x = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm 19$ und bestimme den relativen Fehler bezogen auf das Resultat der Standardfunktion. Man erkläre den beobachteten Effekt. Man überlege sich einen ebenfalls auf der Reihendarstellung basierenden Algorithmus, der bessere Resultate liefert, und vergleiche wiederum mit der Auswertung der Standardfunktion.
(Hinweis: Funktionalgleichung der Exponentialfunktion!) (4 Punkte)

Abgabe am Donnerstag, 21.04.2022, 15:15 Uhr, in der Vorlesung