Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/~diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
ÜBUNGSBLATT NR. 7

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot \ln(i)^{\alpha}}$$

existiert (mit anderen Worten: ob die Reihe summierbar ist).
Anleitung. Wenden Sie das Integralkriterium an. Führen Sie die Substitution $z = \ln(x)$ durch, um das entsprechende uneigentliche Integral zu berechnen.

Aufgabe 2 Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme an.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & = 3 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} -x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = 0 \end{array}$$

c) Für feste Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & a\,x_3 & = b \end{array}$$

Ab Freitag

Aufgabe 3 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in Zeilen-Stufenform und welche in reduzierter Zeilen-Stufenform sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 Es seien reelle Zahlen a, b, c, d gegeben. Zeigen Sie mittels des Gauß-Algorithmus, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

a) $\text{Kern}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $ad - bc \neq 0$

Hinweis. Sie sollten die Matrix umformen und dabei geeignete Fallunterscheidungen machen.

Ab Montag

Aufgabe 5 Geben Sie die Kerne der folgenden Matrizen an. Schreiben Sie Ihre Lösung in der Form $\{\underline{0}\}$ oder $\langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k \rangle$, wobei $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ eine Basis des Kerns ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 Entscheiden Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren jeweils

a) linear unabhängig b) ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$ c) eine Basis des $\mathbb{R}^n$

(mit $n = 3$ bzw. $n = 4$) sind.

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abgabe. Am Freitag, 12.7., in der Übung oder bis dahin in den Übungsgruppen