Serie 5

1. **a)** Zeige, daß die Flächenstücke

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u),$$
$$g(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

gleiche Gauß-Krümmungsfunktionen $K_f(u,v) = K_g(u,v)$ besitzen, aber daß die Identität $(u,v) \mapsto (u,v)$ dennoch keine lokale Isometrie (Abwicklung) beschreibt. Interpretiere dies in Bezug auf das Theorema Egregium.

b) Kann die Sphäre in irgendeiner Umgebung eines Punktes auf die Ebene abgewickelt werden? Warum?

2. Betrachte den Rotationstorus, welcher durch Rotation des Kreises

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0,$$

um die z-Achse gebildet wird, $a > r > 0$. Der Volltorus sei nun ein Planet in einem anderen Sonnensystem, welcher um seine Symmetrie-z-Achse mit konstanter Geschwindigkeit von einer Umdrehung pro torischem Tag rotiert. Der Torianer Toralf hat von seinem Freund Ernst von der Erde ein Foucaultsches Pendel geschenkt bekommen. Was wird er über die Rotation der Schwingungsebene des Pendels feststellen? Wie schnell rotiert diese Ebene, wenn Toralf in Toriopolis mit den torischen Koordinaten (x,y,z) lebt?

3. Betrachte die Rotationsfläche

$$f(\phi, v) = (e^{-v}\cos\phi, e^{-v}\sin\phi, \psi(v)),$$
$$\text{mit } \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1-e^{-2\tau}}\,d\tau,$$

$\phi \in [0, 2\pi]$, $0 \leq v < \infty$.

a) Zeige, daß $f(\phi, v)$ eine orthogonale Parametrisierung ist, d.h. $F = 0$. Berechne die Gauß-Krümmung.

b) Berechne die Orthonormal-Vektoren e_ϕ und e_v und die kovarianten Ableitungen

$$\frac{\nabla}{\partial\phi} f_\phi, \quad \frac{\nabla}{\partial v} f_\phi, \quad \frac{\nabla}{\partial\phi} f_v, \quad \frac{\nabla}{\partial v} f_v \,.$$

c) Sei c eine geschlossene Kurve auf der Fläche mit $v(t) = v_o$ konstant,

$$c(t) = f(\phi(t), v_o), \quad \phi\colon [0,1] \to [0, 2\pi], \quad \phi(0) = 0,\ \phi(1) = 2\pi\,.$$

Zeige, daß der Paralleltransport entlang dieser Kurve durch die Rotation um den Winkel $2\pi e^{-v_o}$ gegeben ist.

Rückgabe: In Absprache mit Übungsleiter.