Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

9. Übung

1. a) Zeigen Sie: Für die charakteristische Funktion φ_X einer reellen Zufallsvariablen X mit $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ und $E(|X|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$ gilt

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + r(t) \text{ mit } \limsup_{t\to 0} r(t)/|t|^{2+\alpha} < \infty.$$

(Hinweis: Siehe Lemma 3.5 aus der Vorlesung.)
b) Folgern Sie aus a) die Existenz einer Konstante $C > 0$, so dass

$$|\varphi_X(t/\sqrt{n})^n - e^{-t^2/2}| \leq C\frac{|t|^{2+\alpha}}{n^\alpha} \text{ falls } |t| \leq n^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

(Hinweis: $\varphi_X(t/\sqrt{n})^n = e^{n \ln \varphi_X(\frac{t}{\sqrt{n}})}$ und Taylor-Entwicklung.)

2. a) Zeigen Sie: Zu einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ und $\delta > 0$ existiert eine elementare Treppenfunktion der Form $f_\delta = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}$, so dass $E(|f - f_\delta|) \leq \delta$.
(Hinweis: Beginnen Sie mit dem Fall $f = \mathbb{1}_A$ für ein messbares $A \subset \mathbb{R}$, so das $\lambda(A) < \infty$.)
b) Zeigen Sie unter Verwendung von a) den Satz von Riemann-Lebesgue: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx = 0$.

3. a) Zeigen Sie für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ von Ereignissen in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dass $P(\limsup_n A_n) \geq \limsup P(A_n)$.
b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass für eine Folge (X_i) von unabh. ident. verteilten ZV'en mit $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ gilt für alle $a > 0$

$$P(\limsup_n \sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n} \in [-a, a]^c) = 1.$$

Insbesondere gilt also für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, dass $\limsup S_n/\sqrt{n} = +\infty$ und $\liminf S_n/\sqrt{n} = -\infty$ fast sicher.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit dem Zentralen Grenzwertsatz, dass $P(\limsup \ldots) > 0$ und schließen dann mit dem Kolmogorovschen 0-1-Gesetz.)

4. a) Zeigen Sie folgende Verschärfung des Starken Gesetzes der großen Zahlen nach Kolmogorov: Falls $a_n > 0$ eine monoton wachsende Folge ist mit $a_n \to \infty$, und $(X_i)_i$ eine unabh. Folge verteilte ZV'en ist mi $E(X_i) = 0$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^2} V(X_n) < \infty$, so gilt $\frac{1}{a\,n} \sum_{k=1}^n X_k \longrightarrow 0$ fast sicher für $n \to \infty$.
(Hinweis: Verwenden Sie den Kolmogorov'schen Reihensatz zusammen mit der deterministischen Aussage: $\sum_n \frac{x_n}{a_n}$ konvergiert $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.)
b) Zeigen Sie unter Verwendung von a) dass für eine Folge (X_i) von unabh. ident. verteilten ZV'en mit $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n} S_n = 0$, wobei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.