Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

7. Übung

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Augenzahlen bei 10.000-maligen Werfen eines fairen Würfels im Intervall $[3450, 3700]$ liegt, approximativ unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

   (Bemerkung: Die Verteilungsfunktion $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ wird approximativ bestimmt. In vielen Büchern findet man sie (meistens im Anhang) in Tabellenform angegeben.)

2. Berechnen Sie die charakteristische Funktion
   a) der Gleichverteilung auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$,
   b) der Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zum Parameter $\lambda > 0$.
   c) der Poissonverteilung auf $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ zum Parameter $\lambda > 0$.

3. a) Beweisen Sie die verwendete Hilfsaussage beim Eindeutigkeitssatz für die charakteristischen Funktionen: Gilt für die Verteilungsfunktionen zweier Borel'scher W-Maße μ und ν, dass $F_\mu(t) = F_\nu(t)$ in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$, in denen F_μ und F_ν stetig sind, so ist $\mu = \nu$.

   b) Zeigen Sie unter Verwendung von charakteristischen Funktionen: Die Summe $Z = X + Y$ zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 und λ_2 ist wieder Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

4. Die Lyapunov-Bedingung für eine Doppel-Folge von reellen Zufallsvariablen $(X_i^{(n)})_{i=1,\ldots,m_n}$, $n \in \mathbb{N}$ lautet, dass für ein $\delta > 0$

   $$\sum_{i=1}^{m_n} E[|X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)})|^{2+\delta}] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Zeigen Sie, dass die Lyapunov-Bedingung die Lindeberg-Bedingung (s. Vorlesung) impliziert.