Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

7. Übung

1. Zeigen Sie: Falls $\mu_n \Rightarrow \mu$ für eine Folge von Borel'schen W-Maßen auf einem topologischen Raum $(S, \mathcal{S})$ und falls $F : S \to T$ eine stetige Abbildung in einen anderen Topologischen Raum T ist , so gilt für die Folge der Bildmaße $\nu_n := F_* \mu_n$, dass $\nu_n \Rightarrow \nu =: F_* \mu$.

2. Zeigen Sie: Falls $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ZV'en mit Werten in einem metrischen topologischen Raum ist, so dass $X_n \to X$ fast sicher, so gilt auch $X_n \Rightarrow X$. Gilt die analoge Aussage auch, falls $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit?

3. Der 'Abstand in Totalvariation' zweier W-Maße auf einem Messraum $(E, \mathcal{E})$ ist definiert als $\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{E}} [\mu(A) - \mu(B)]$. Man sagt, die Folge von W-Maßen μ_n konvergiert in Totalvariation gegen μ, falls $\|\mu_n - \mu\|_{TV} \to 0$. Zeigen Sie im Fall, dass $(E, \mathcal{E})$ ein top. Raum mit seiner Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{E}$ ist, dass aus der Konvergenz in Totalvariation die schwache Konvergenz von μ_n gegen μ folgt. Gilt auch die Umkehrung hiervon?

4. Führen Sie die Details vom Beweis des Satzes 3.3 der Vorlesung aus: Eine Familie von reellen Zufallsvariablen X_n konvergiert schwach gegen die reelle Zufallsvariable X genau dann, wenn für die zugehörieg Folge von Verteilungsfunktionen gilt $F_n(t) \to F(t)$ in allen $t \in \mathbb{R}$, in denen $F(.)$ stetig ist. (Hinweis: $F(.)$ ist stetig in $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $P(\{X = t\}) = 0$).