Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

6. Übung

1. Zeigen Sie für $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable und $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ und $t > 0$ beliebig

$$\max_{1\le k\le n} P(|S_k| \ge 4t) \le P(\max_{1\le k\le n} |S_k| > 4t) \le 4 \max_{1\le k\le n} P(|S_k| > t).$$

2. a) Zeigen Sie für eine reelle Zahlenfolge (x_n) die Implikation

$$\sum_n \frac{x_n}{n} \text{ konvergiert} \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

   b) Benutzen Sie das Resultat aus a) zusammen mit dem Kolmogorov'schen Reihensatz, um zu schließen, dass eine Folge von unabhängigen ZV'en mit $E(X_n) = 0$ und $\sum_n \frac{1}{n^2} V(X_n) < \infty$ dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

3. a) Zeigen Sie: Für eine Folge von Dirac-Maßen $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gilt $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ genau dann, wenn $x_n \to x$.

   b) Zeigen Sie, dass die Folge $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}$ schwach gegen die Gleichverteilung auf $[0,1]$ konvergiert.

4. Zeigen Sie: Eine Folge (X_n) von geometrisch verteilten Zufallsvariablen[1] mit Parameter $p_n = (1 - \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$ konvergiert schwach gegen eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ.

[1]Eine Zufallsvariable X heißt geometrisch verteilt mit Parameter $p \in]0,1[$, falls $P(X = k) = (1-p)p^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$.