Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

5. Übung

1. Es seien $X_1, \dots, X_n$ mit $X_i \sim \mu := p\delta_0 + (1-p)\delta_0$ unabhängige Realisierungen eines Bernoulli-Experimentes mit Erfolgsparameter $p = \frac{m}{n} \in [0,1]$, $m \in \{0, \dots, n\}$, und sei $\mu_{X^{(n)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ die zugehörige empirische Verteilung. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(\mu_{X^{(n)}} = \nu)$, mit ν einem Wahrscheinlichkeitstmaß η auf $\{0,1\}$, im Fall von $\nu = \mu$ maximal wird.

2. a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\lambda_X : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $\lambda_X(t) = E(e^{tX})$ für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable X zum Parameter $\alpha > 0$.
   b) Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich, d.h. es ex. $N \in \mathbb{N}$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\} \subset \mathbb{R}$ so dass $\mu_X(S) = 1$, wobei μ_X die Verteilung von X bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Verteilung μ_X, also die Zahlen $\mu(s_1), \dots, \mu(s_N)$, durch die Laplace-Transformierte $t \to E(e^{tX})$, $t \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt sind.

3. Es seien X und Y zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen und $Z := X + Y$.
   a) Zeigen Sie für die zugehörigen Laplace-Transformierten, dass $\lambda_Z(t) = \lambda_X(t) \cdot \lambda_Y(t) \in [0,\infty]$.
   b) Zeigen Sie für den Fall, wenn X und Y nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen, (d.h. $\mu_X(\mathbb{Z}) = 1 = \mu_Y(\mathbb{Z})$ für die Verteilungen μ_X und μ_Y von X bzw. Y), dass die Verteilung von Z gegeben ist durch das sogenannte 'Faltungsprodukt' $\mu_X * \mu_Y$ der Maße μ_X und μ_Y', d.h.
   $$\mu_Z(\{k\}) = \mu_X * \mu_Y(\{k\}) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mu_X(\{l\}) \cdot \mu_Y(\{k-l\}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
   c) Zeigen Sie: Falls X Poisson-verteilt ist mit Parameter $\alpha > 0$ und Y Poisson-verteilt mit Parameter $\beta > 0$, so ist Z ebenfalls Poisson-verteilt mit Parametr $\alpha + \beta$.

4. Bestimmen Sie die Cramér Transformierte $I_\mu : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ zum Maß μ auf $\mathbb{R}$, falls
   a) $\mu(dx) = (1-p)\delta_0(dx) + p\delta_1(dx)$ (Bernoulli-Verteilung zum Parameter $p > 0$)
   b) $\mu(dx) = \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x) e^{-\lambda x} dx$ (Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$).