Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

4. Übung

1. Zeigen Sie: Es sei $(X_n)_n$ eine Folge identisch verteilter ZV'en, welche dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt, und sei (Y_n) eine zweite Folge von ZV'en mit $\sum_n P(X_n \neq Y_n) < \infty$, so genügt (Y_n) ebenfalls dem starken Gesetz der großen Zahlen.

2. Sei (X_n) eine unabhängige Folge identisch verteilter nicht-integrierbarer ZV'en, d.h. $E(|X_1|) = \infty$. Zeigen Sie für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_n| = +\infty$ fast sicher.
(Hinweis: Die Aussage folgt aus $\frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}S_{n-1}$ und $P(\limsup_n C_n) = 1$ für $C_n := \{|X_n| > nK\}$ für $K > 0$ beliebig, vergl. Beweis von Satz 2.7 aus der Vorlesung.)

3. Sei S eine endliche Menge und $\mathcal{P}(S)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S, aufgefasst als Teilmenge des $|S|$-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^{|S|}$. Sei $\mu \in \mathcal{P}(S)$ mit $\mu(s) > 0$ für alle $s \in S$ und $\mathrm{Ent}_\mu : \mathcal{P}(S) \mapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{Ent}_\mu(\nu) = \sum\limits_{s\in S} \ln(\frac{\nu(s)}{\mu(s)})\nu(s)$.

   a) Zeigen Sie für $A \subset \mathcal{P}(S)$ offen, dass
$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{\nu\in A\cap\mathcal{P}_n} \mathrm{Ent}_\mu(\nu) = \inf_{\nu\in A} \mathrm{Ent}_\mu(\nu),$$
   wobei $\mathcal{P}_n := \{\mu \in \mathcal{P}(S) \,|\, n\cdot\mu(s) \in \mathbb{N}\ \forall s \in S\}$

   b) Zeigen Sie, dass für $\nu \in \mathcal{P}(S)$ gilt $\mathrm{Ent}_\mu(\nu) = \sup\limits_{\psi:S\to\mathbb{R}} [E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi)]$.

   Hinweis zu b) Teilaussage "$\geq$": Schreiben Sie $\mathrm{Ent}_\mu(\nu) - E_\nu(\psi)$ als Integral bzgl. ν und nuzten Sie die Jensen'sche Ungleichung für die Funktion $t \to \log(t)$.

4. Es bezeichne μ die Gleichverteilung auf den drei Punkten $-1, 0, 1$. Bestimmen Sie mit dem Satz von Sanov die Rate im exponentiellen Abfall der Wahrscheinlichkeiten $P(\frac{1}{n}S_n > \frac{1}{2})$ mit $n \to \infty$, wenn $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die Summe von n unabhängigen Realisierungen (X_n) von μ-verteilten Zufallsvariablen bezeichnet.

   (Hinweis: $\frac{1}{n}S_n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_{X^{(n)}} \in A$, wobei A die Menge der Verteilungen mit Erwartungswert $> \frac{1}{2}$ bezeichnet.)