Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

3. Übung

Achtung: Verwenden Sie die folgende korrigierte Definition von Unabhängigkeit:

Eine Familie von Ereignissen $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ im W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $\Lambda' \subset \Lambda$ gilt $P(\cap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda'} P(A_\lambda)$.

1. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel:
   a) Die Familie $(A_1, \ldots, A_n)$ von Ereignissen ist unabhängig genau dann, wenn $(A_1^c, \ldots, A_n^c)$ unabhängig ist.
   b) Die Familie $(A_1, \ldots, A_n)$ ist unabhängig genau dann, wenn $P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.
   c) Für ein Ereignis A ist (A, A) unabhängig genau dann, wenn $P(A) \in \{0, 1\}$.
   d) Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig genau dann, wenn die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unkorrelliert sind.

2. Beweisen Sie: Für eine unabh. Familie $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von $\cap$-stabilen Mengensystemen ist auch $\{\sigma(\mathcal{E}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ unabhängig (siehe Vorlesung).

3. Beweisen Sie die folgende Variante des schwachen Gesetzes der großen Zahlen nach Khintchine: Für eine Folge (X_n) integrierbarer unkorrellierter ZV'en mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}(X_i) = 0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = 0$ im Sinne der stochastischen Konvergenz.

4. Sei X_n eine Folge von unabhängigen ZV'en auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Verteilungen

   $$\mu_{X_n}(dx) = \frac{1}{2}\frac{1}{n\log(n+1)}\delta_{-n}(dx) + (1 - \frac{1}{n\log(n+1)})\delta_0(dx) + \frac{1}{2}\frac{1}{n\log(n+1)}\delta_n(dx).$$

   Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 0$ im Sinne der stochastischen Konvergenz gilt, nicht aber im Sinne der fast sicheren Konvergenz.

   Hinweis: Verwenden Sie zum einen das Kriterium aus Aufgabe 3) sowie zum anderen, dass für eine reelle Folge (a_n) die Existenz von $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\lim_n \frac{1}{n} a_n = 0$ nach sich zieht. Zeigen Sie hierzu mit der Umkehrung des Borell-Cantelli Lemmas, dass $\limsup_n \frac{1}{n}|X_n| \geq 1$ fast sicher.