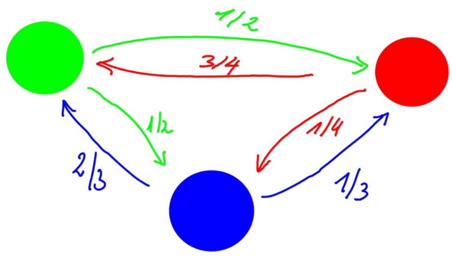
Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

2. Übung

1. Beweisen Sie: Eine Folge von (S_n) von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $P(\sup_{n \le k \le m} |S_k - S_m| > \delta) \to 0$ für $m \ge n \to \infty$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Falls für eine Folge von integrierbaren Zufallsvariablen gilt, dass $X_n \to X$ fast sicher und $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$, so folgt $X_n \to X$ in L^1, d.h. $E(|X_n - X|) \to 0$, für $n \to \infty$.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung der zufälligen Irrfahrt $(\omega_i)_{i=0,\dots,3}$ der Länge $T = 3$ zwischen den drei Zuständen R, G, B bei Start in G, mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{xy} \in [0,1]$ für $x, y \in \{R, G, B\}$ wie folgt



$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_3) \in \{G, R, B\}^4, \omega_0 = G\}$$
$$\mathcal{F} = \{E \,|\, E \subset \Omega\} = 2^\Omega$$
$$P : \mathcal{F} \to [0,1], \quad P(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{3} p_{\omega_{i-1},\omega_i}$$

Bestimmen Sie die Verteilung P_τ der 'Trefferzeit' vom Zustand B

$$\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \tau(\omega) := \inf\{k \in \{0, \dots, T\} \,|\omega_k = B\},$$

mit der Konvention, dass $\inf \emptyset := +\infty$.

4. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu_{m,C})$ der Wahrscheinlichkeitsraum zur d-dimensionalen Gauß-Verteilung mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{d \times d}_{symm,>0}$. Bestimmen Sie die Verteilung P_X der $\mathbb{R}^k$-wertigen $(k \le d)$ Zufallsvariablen $X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $X(\omega) = A\,\omega$, wobei $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$.