Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

13. Übung

1. Bestimmen Sie die mittleren Trefferzeiten des Bankrottzustands 0 im einfachen Ruinmodell (Beisp. 5.2 aus der Vorlesung).

2. a) Zeigen Sie: Die Anzahl der Versuche beim Wurf einer Münze mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ bis zum ersten Misserfolg ist geometrisch verteilt mit Parameter $\rho = p$.
   b) Zeigen Sie, dass die geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}$ charakterisiert ist über die Eigenschaft, dass $P(Z > r) = \rho^r$ mit $\rho \in [0,1]$.
   c) Zeigen Sie für eine geometrisch vert. Zufallsvariable $Z < \infty$ f.s. $\Leftrightarrow \rho < 1 \Leftrightarrow E(Z) < \infty$.

3. Es (X_k) eine homog. Markov-Kette auf einem abzählbaren Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ und $i, j \in E$, so dass $p_{ij}^k > 0$ und $p_{ji}^l > 0$ für geeignete $k, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass i rekurrent ist genau dann, wenn j rekurrent ist.

4. Zeigen Sie, dass $X_k := \sum_{i=1}^k \xi_i$ mit einer unabhängigen Folge (ξ_i) von binären Zufallsvariablen der Form $\xi = +1$ mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $\xi = -1$ mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ eine Markovkette auf $\mathcal{Z}$ definiert, und zeigen Sie mit dem starken Gesetz der großen Zahlen, dass es im Fall $p \neq q$ keinen rekurrenten Zustand geben kann. Zeigen Sie auch die Rekurrenz im symmetrischen Fall z.B. mit dem Satz vom iterierten Logarithmus.