Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

12. Übung

1. Zeigen Sie das "Markov-Lemma" für drei Ereignisse A, B, C in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d.h. die Äquivalenz der drei Aussagen
   1) A, B bedingt unabhängig gegeben C
   2) $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
   3) $P(A \cap C|B) = P(A|C)P(C|B)$

2. Zeigen Sie: Für $(X_k)_k$ eine Markov-Kette auf einem abzählbaren Zustandsraum E und $f : E^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ messbar gilt

$$E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = i] \\ = E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_n = i).$$

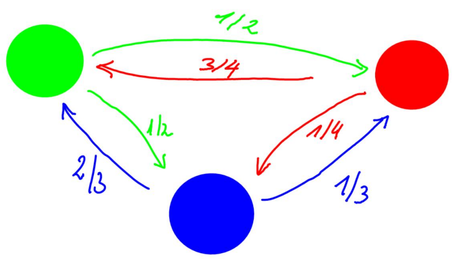
   (Hinweis: Für $f = 1\!\!1_Z$ mit $Z = \{e_1\} \times \dots \{e_N\} \times E \times E \dots \in \mathcal{Z}$ ergibt sich die Beh. durch Nachrechnen. Für allg. f hieraus durch Approximation.)

3. Zeigen Sie: Ein stoch. Prozess $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ auf einem abzählbaren Zustandraum ist Markov'sch genau dann, wenn $\forall f : E \to \mathbb{R}$ messbar beschränkt, $i \leq j \in \mathbb{N}_0$,

$$E[f(X_i)|\sigma(X_k, k \leq j)] = E[f(X_i)|\sigma(X_j)].$$

   (Hinweis: Arbeiten Sie zunächst mit Funktionen der Form $f = 1\!\!1_{\{e\}}$ für $e \in E$.)

4. Betrachten Sie die folgende Markovkette auf dem dreielementigen Zustandsraum (s. Vorlesung).



   a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an, sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten bei einem zweifachen Sprung an.
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei Start in G nach drei bzw. vier Schritten wieder in G zu sein?
   c) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeiten und mittleren Trefferzeiten für $\{G\}$ bei Start in G, B bzw. R.