Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

10. Übung

(Wiederholungsblatt – ohne Wertung)

1. Zeigen Sie: Für eine Folge von Ereignissen E_n in einem W-Raum mit $\lim_n P(E_n) = 0$ und $\sum_n P(E_n \cap E_{n+1}^c) < \infty$ gilt $P(\limsup E_n) = 0$.

2. Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit $E(|X|) \geq a > 0$ und $E(X^2) = 1$. Dann ist $P(|X| \geq \lambda a) \geq (1-\lambda)^2 a^2$ für alle $\lambda \in [0,1]$.

3. Aus $E(|X+Y|^p) < \infty$ für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y folgt $E(|X|^p) < \infty$ und $E(|Y|^p) < \infty$.

4. Für eine Folge X_n von ZV'en gilt $X_n \to \infty$ fast sicher genau dann, wenn für alle $M > 0$ gilt, dass $P(X_k < M$ für unendlich viele k$) = 0$.

5. Falls $X_n \to X$ stochastisch auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt auch dass $f(X_n) \to f(X)$ stochastisch. Die Aussage ist i.A. falsch, wenn f nur messbar ist.

6. Falls $X_n \to X$ stochastisch, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine messbare Menge $C \subset \Omega$ mit $P(C) > (1-\epsilon)$, so dass $X_n \to X$ gleichmäßig auf C (Satz v. Egorov).

7. Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (E_n) von Ereignissen, so dass $\sum_n P(E_n) = \infty$, aber $P(\limsup E_n) < 1$.

8. Für eine Folge von ZV'en (X_n) mit $E(X_n) = 1$ und $\sup_n E(X_n^2) < \infty$ gilt $P(\limsup X_n \geq 1) > 0$.

9. Falls $X_n \to 0$ fast sicher, so gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ fast sicher. Die analoge Aussage für stochastische Konvergenz gilt (auch für unabhängige) X_n nicht, wie das Beispiel $X_n = 2^n$ oder $= 0$ mit, jeweils mit Wahrscheinlichkeit n^{-1} bzw. $1 - n^{-1}$ zeigt.

10. Geben Sie ein Beispiel an für eine Folge von ZV'en auf einem gemeinsamen W-Raum an, die in Verteilung, nicht aber stochastisch konvergieren.

11. Zeigen Sie die Ungleichung von Ottaviani-Skorokhod: Für $X_1, \ldots, X_n$ unabh. ZV'en, $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ und $\eta, \epsilon > 0$ gilt

$$P(\max_{m \leq j \leq n} |S_j| \geq \eta + \epsilon) \cdot \min_{m \leq j \leq n} P(|S_j - S_n| < \epsilon) \leq P(|S_n| \geq \eta)$$

bzw.

$$P(\max_{m \leq j \leq n} S_j \geq \eta + \epsilon) \cdot \min_{m \leq j \leq n} P(S_j - S_n < \epsilon) \leq P(S_n \geq \eta).$$

12. Es sei $(X_n)_n$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen mit $X_n = \pm\sqrt{n}/\log\log n$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Zeigen Sie: X_n erfüllt das Gesetz der großen Zahlen, d.h. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow 0$, erfüllt aber nicht das Kolmogorov-Kriterium $\sum_n E(X^2)/n^2 < \infty$.