Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

1. Übung

1. Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ und $\mu^* : 2^\Omega :\to [0, \infty]$ das zugehörige äußere Maß, $\mathcal{M} := \{M \subset 2^\Omega \,|\, M\ \mu^*\text{-messbar}\}$.

   Zeigen Sie: Dann ist $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)$ vollständig.

2. Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine rechtsstetige nichtfallende Funktion und $\mathcal{E} := \{E \subset \mathbb{R} \,|\, E = \bigcup_{k=1}^N]a_k, b_k]\ a_1 \leq b_1 \leq a_2, \leq \cdots, b_N, N \in \mathbb{N}\}$.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ ein Ring ist und dass die Vorschrift $\mu_F : \mathcal{E} \to [0,1]$, $\mu(\bigcup_{k=1}^N]a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^N F(b_k) - F(a_k)$ ein Prämaß auf $\mathcal{E}$ definiert.

3. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\eta([a,b[) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a < 0 \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   zu einem Inhalt auf dem Ring $\mathcal{D} := \{D \subset \mathbb{R} \,|\, D = \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k[\ a_1 \leq b_1 \leq a_2, \leq \cdots, b_N, N \in \mathbb{N}\}$ fortgesetzt werden kann. Ist diese Fortsetzung ein Prämaß?

4. Sei μ^* das äußere Maß auf 2^Ω, welches von einem Prämaß μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ erzeugt wird. Nehmen Sie an, dass μ beschränkt ist, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$.

   a) Zeigen Sie: $F \subset \Omega$ ist μ^*-messbar genau dann, wenn es eine Menge der Form $B = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $F \subset B$ und $\mu^*(B \setminus F) = 0$.

   b) Zeigen Sie: $F \subset \Omega$ ist μ^*-messbar genau dann, wenn $\mu^*(F) + \mu^*(\Omega \setminus F) = \mu(\Omega)$.

   Hinweis zu a) (Hinrichtung): Zeigen Sie die entsprechende Aussage zunächst für $\mu^*(B \setminus F) \leq \epsilon$. Benutzen Sie dabei die Definition von μ^* sowie die die Messbarkeit von F für die Abschätzung des "Fehlers" $\mu^*(B \setminus F)$.