Univ. Leipzig, Prof. Dr. M. v. Renesse
Wahrscheinlichkeitstheorie I im SoSe 2013

Klausur

Hinweise zur Bearbeitung: Sämtliche Hilfsmittel ohne Elektronik erlaubt. Treffen Sie eine Auswahl der Aufgaben, die Sie bearbeiten wollen. Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Geben Sie Ihre Lösungen auf separaten Lösungsblättern je Aufgabe den Aufgabennummern nach geordnet ab und versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Es stehen 13 Aufgaben zur Auswahl.

1. Zeigen Sie: Für eine σ-Algebra $\mathcal{E}$ auf einem Grundraum E und $A \subset E$ ist $\mathcal{E}_A := \{A \cap F | F \in \mathcal{E}\}$ eine σ-Algebra auf der Menge A.

2. Zeigen Sie: Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf einer abzählbaren Menge E (mit der Potenzmenge $2^E =: \mathcal{E}$ als σ-Algebra) gibt es zu $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $A \subset E$, so dass $\mu(A) \geq 1 - \epsilon$.

3. Zeigen Sie: Für drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{F}$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt
$$|P(A \cap C) - P(B \cap C)| \leq P(C).$$

4. Zeigen Sie: Für eine reelle Zufallsvariable X mit invertierbarer Verteilungsfunktion F ist $U := F(X)$ gleichverteilt auf $[0, 1]$.

5. Geben Sie ein Beispiel für eine reelle Zufallsvariable X und einer messbaren Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche die Jensen'sche Ungleichung nicht erfüllen.

6. Es sei U eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von $Z := U^2$.

7. Es seien U_1 und U_2 zwei stochastisch unabhängige auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Dichte der Verteilung sowie den Erwartungswert von $Z := \max(U_1, U_2)$.

8. Beweisen Sie: Zwei reelle Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sind stochastisch unabhängig, falls $E(XYUV) = E(XU)E(YV)$ für alle beschränkten messbaren Zufallsvariablen $U, V : \Omega \to \mathbb{N}$.

9. Seien X und und Y stochastisch unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ bzw. $m \in \mathbb{N}$ und Parameter $q \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass $Z := X + Y$ erneut binomialverteilt ist, genau dann wenn $p = q$.

10. Geben Sie ein Beispiel einer Folge von reellen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ an, die dem starken Gesetz der großen Zahlen entspricht, nicht aber dem zentralen Grenzwertsatz.

11. Es sei $(X_n)_{n\in N}$ eine Folge von unabhängigen auf der Menge $\{1,2,3\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Berechnen Sie

$$P\Big(\sum_{i=1}^{100} X_i \in [170, 210[\Big)$$

approximativ durch Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes. (Die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du$ dürfen dabei als bekannt vorausgesetzt werden.)

12. Beweisen Sie: Für eine Folge $(X_n)_n$ von reellen stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(X_n) = 0$, gibt es bestenfalls genau ein $\alpha \in]0,\infty[$, so dass

$$P[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}|\sum_{k=1}^{n} X_k| = c > 0 \text{ existiert}] > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Kolmogorov'sche 0-1-Gesetz.

13. Zeigen Sie: Eine nichtnegative Zufallsvariable X ist exponentialverteilt genau dann, wenn $P(X \geq s+t | X \geq t) = P(X \geq s)$ für alle $s,t > 0$.