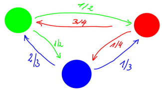
1.3 Zufallsvariablen

Beispiel



- Irrfahrt zwischen drei Zuständen
  Start in G bei $t = 0$, Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$
- Grundraum

$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_T) \in \{G, R, B\}^{T+1}, \omega_0 = G\}$$

- σ-Algebra

$$\mathcal{F} = \{E \mid E \subset \Omega\} = 2^\Omega$$

- Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1], \quad P(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{T} p_{\omega_{i-1}, \omega_i}$$

- Trefferzeit vom Zustand B

$$\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \tau(\omega) := \inf\{k \in \{0, \dots, T\} \,|\omega_k = B\}$$

- Beispiel: Wette auf frühes Treffen von B

$$C : \Omega \to [0, 1], C(\omega) = e^{-\tau(\omega)}.$$

Messbare Abbildungen

Definition 1.15

- *Eine Abbildung* $X : E \mapsto F$ *zwischen zwei messbaren Räumen* $(E, \mathcal{E})$ *und* $(F, \mathcal{F})$ *heißt* $(\mathcal{E}/\mathcal{F}$-$)$**messbar**, *falls*
$$X^{-1}(A) \in \mathcal{E} \text{ für alle } A \in \mathcal{F}.$$
- *Eine* $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*-messbare Abbildung*[6]
$$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$
auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt* **(reelle) Zufallsvariable** *oder* **(reelle) Zufallsgröße**.

Bemerkung $A \subset \Omega$ *messbar* $\Leftrightarrow$ **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ *ist messbar*
$$\text{mit } \mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R},\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

[6] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) :\Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Sprechweisen

Definition 1.16 *Von einer Abbildung $X : E \mapsto F$ in einen messbaren Raum $(F, \mathcal{F})$* **erzeugte σ-Algebra**

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{F}\}$$

Bemerkung $X : E \mapsto F$ $\mathcal{E}/\mathcal{F}$*-messbar* $\Leftrightarrow \sigma(X) \subset \mathcal{E}$

Definition 1.17

- *Eine reelle ZV X heißt* **endlich**, *falls $X(\omega) \in \mathbb{R} \,\forall\, \omega \in \Omega$.*
- *X heißt* **beschränkt**, *falls ein $K > 0$ existiert, so dass*
  $$|X(\omega)| \leq K \,\forall\, \omega \in \Omega.$$

Approximation durch Treppenfunktionen

Definition 1.18 *Eine Zufallsvariable* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *heißt* **einfach**, *falls*

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \overline{\mathbb{R}}, \quad A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{F} :\ \Omega = \bigcup_{i=1,\ldots N} A_i$$

mit (A_i) *paarweise disjunkt, so dass*

$$X(e) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(e).$$

Satz 1.11 *Jede beschränkte Zufallsvariable* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *lässt sich durch eine Folge* $(X_n)_n$ *von einfachen Zufallsvariablen* (X_n) *auf* Ω *gleichmäßig approximieren, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega) - X_n(\omega)| = 0.$$

Bew: *Zu* $n \in \mathbb{N}$ *definiere* $X_n(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{X^{-1}(]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])}(\omega)$. □

Bemerkung

- *Analog: Für* $X \geq 0$ *endliche ZV ex Folge* (X_n) *einfacher ZV'n*
  $$X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\, \forall\, \omega \in \Omega.$$
- *Summen, Produkte etc. von einfachen ZV'n sind einfache ZV'n.*

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Definition 1.19 *Für eine einfache Zufallsvariable* $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ *heißt*

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, P(A_i) =: \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

das **Integral von** X **(bzgl.** P**)** *bzw.* **Erwartungswert**.

Schreibweisen $\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \mathbb{E}_P(X) = \langle X \rangle_P$.

Bemerkung

- $\mathbb{E}_P(X)$ *hängt nicht von der genauen Darstellung von* X *ab.*
- $\mathbb{E}_P(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}_P(X) + \mu \mathbb{E}_P(Y)$.
- $|\mathbb{E}_P(X)| \leq \mathbb{E}_P(|X|) \leq \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$

Integral für beschränkte Zufallsvariablen

Satz 1.12 *Falls X eine beschränkte ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ex.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega) P(d\omega) =: \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

für jede gleichmäßige Approximation $X_n \to X$ von X durch einfache ZV'en, unabhängig von der genauen Wahl von (X_n).

Bew: *Sei $X_n \to X$ gleichmäßig und $Y_n \to X$ gleichmäßig auf Ω*

$\Rightarrow X_n - Y_n \to 0$ *gleichmäßig auf Ω.*

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(Y_n)| &= |\mathbb{E}(X_n - Y_n)| \\ &\leq \sup_\omega |X_n(\omega) - Y_n(\omega)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Analog:

$$|\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_m)| \leq \sup_{\omega\in\Omega} |X_n(\omega) - X_m(\omega)| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\Rightarrow (\mathbb{E}(X_n))_n$ *reelle Cauchy-Folge mit* $\lim \mathbb{E}(X_n) = \lim \mathbb{E}(Y_n)$. □

Integral für nichtnegative Zufallsvariablen

Satz 1.13 *Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar und eine Folge (X_n) einfacher ZV'en mit*

$$X_n(\omega) \nearrow X(\omega) \, \forall \omega \in \Omega.$$

Dann ist

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega X_n(\omega) P(d\omega) \in [0, \infty]$$

unabhängig von der genauen Wahl von (X_n).

Bsp. 1.11 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$,

$$X, Y : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}, Y(\omega) = \frac{1}{\omega}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \omega^{-1/2} d\omega = 2\omega|_{\omega=0}^{\omega=1} = 2 < \infty.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 \omega^{-1} d\omega = \ln(\omega)|_{\omega=0}^{\omega=1} = 0 - (-\infty) = \infty.$$

Integral – Allgemeiner Fall

Definition 1.20 *Eine ZV* $X : (\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt (absolut)* **integrierbar**, *falls*

$$\mathbb{E}_P(X_+) < \infty \text{ und } \mathbb{E}_P(X_-) < \infty$$

mit

$$X_\pm : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad X_\pm(\omega) = \max(\pm X(\omega), 0).$$

In dem Fall definiert man das **Integral von X (bzgl.** P**)** *als*

$$\mathbb{E}_P(X) := \mathbb{E}_P(X_+) - \mathbb{E}_P(X_-).$$

Bemerkung

- *Äquivalente Bedingung* $\mathbb{E}_P(|X|) < \infty$.
- *Gelegentlich verlangt man nur die* **einseitige Integrierbarkeit**

$$\min(\mathbb{E}_P(X_+), \mathbb{E}_P(X_-)) < \infty$$

$\rightsquigarrow \mathbb{E}_P(X) := \mathbb{E}_P(X_+) - \mathbb{E}_P(X_-) \in \overline{\mathbb{R}}$ *eindeutig definiert.*

Integral: Nachträge

Definition 1.21 *Für X ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbb{E}_P(X; A) := \int_A X dP := \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega).$$

Definition 1.22 *Zwei ZV X, Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißen* **äquivalent**, *falls $X = Y$* **fast sicher**, *d.h. falls*

$$\{\omega \in \Omega, |X(\omega) \neq Y(\omega)\} \text{ ist } P\text{–Nullmenge.}$$

Definition 1.23

- $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \geq 0$, *falls X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit*
$$\mathbb{E}_P(|X|^p) < \infty.$$
- $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *falls*
$$\exists K \geq 0, \text{ s.d. } |X| \leq K \ P\text{-fast sicher.}$$

Bsp. 1.12 $X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \in L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)) \setminus L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

Bemerkung *Analog* **vektorwertige ZV** $X = (X^1, \ldots, X^d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$E(X) := (E(X^1), \ldots E(X^d)) \in \mathbb{R}^d.$$

Nachträge (Forts.): Maße mit Dichten auf $\mathbb{R}$

Definition 1.24 *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **absolut stetig**, *falls ex. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar*

$$F(a) - F(b) = \int_b^a m(s)\, ds \; \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Bsp. 1.13 $F(x) = (1 - \frac{1}{x^2})_+ = \int_{-\infty}^x m(t)dt,\; m(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 1 \\ \frac{2}{t^3} & \text{falls } t \geq 1. \end{cases}$

Satz 1.14 *Sei μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}$ mit $F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x m(t)dt$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)m(x)dx$$

für alle messbaren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bew: *Klar für $f = \mathbb{1}_{]a,b]}$. Für allgemeine f folgt die Aussage durch Approximation mit einfachen Zufallsvariablen.*

Definition 1.25 *Ein Maß auf μ auf $\mathbb{R}$ heißt* **absolut stetig** *$:\Leftrightarrow F_\mu$ ist abs. stetig. In dem Fall heißt m mit $\mu(dx) = m(x)dx$* **Dichte** *vom μ bzgl. λ.*

Nachträge (Forts.): Ungleichungen

Satz 1.15 (Cauchy-Schwarz) $\mathbb{E}(X \cdot Y) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ *für alle* $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Bew: *Mit Standardargument, da* $\mathbb{E}[(\lambda X + \mu Y)^2] \geq 0 \, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. □

Satz 1.16 (Markov) *Sei* $X \geq 0$ *und* $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *nicht-fallend, dann*

$$P(X \geq \delta) \leq \tfrac{1}{\varphi(\delta)} \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Bew:

$$\begin{aligned} P(X \geq \delta) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}; X \geq \delta) = \mathbb{E}(\frac{\varphi(\delta)}{\varphi(\delta)}; X \geq \delta) \\ &\leq \mathbb{E}(\frac{\varphi(X)}{\varphi(\delta)}; X \geq \delta) \leq \frac{1}{\varphi(\delta)} \mathbb{E}(\varphi(X)) \end{aligned}$$

□

Satz 1.17 (Jensen) *Falls* X *eine reelle ZV und* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Bew: *Sei* $m := \mathbb{E}(X)$. *Konvexität von* $\varphi \Rightarrow \exists \, s \in \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \varphi(m) + s(x - m) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \ \varphi(X) &\geq \varphi(m) + s(X - m) \\ \Rightarrow \ \mathbb{E}(\varphi(X)) &\geq \varphi(m) + s(\mathbb{E}(X) - m) = \varphi(\mathbb{E}(X)). \end{aligned}$$

□

1.4 Konvergenz von Zufallsvariablen

Fast sichere und stochastische Konvergenz

Definition 1.26 *Eine Folge $(X_n)_n$ von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$* **konvergiert** *P-***stochastisch** *gegen die ZV X, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \epsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad .$$

Bemerkung *Andere Bezeichnung:* **Konvergenz im Maß/in Wahrscheinlichkeit**.

Definition 1.27 *Eine Folge $(X_n)_n$ von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$* **konvergiert** *P-***fast-sicher** *gegen die ZV X, falls*

$$X_n(.) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(.) \quad P\text{-fast sicher},$$

d.h. $\exists$ P-Nullmenge N, s.d. $X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N$.

Bsp. 1.14 *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ und (q_n) eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dann gilt für*

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ X_n := \mathbb{1}_{]q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}[}$$

dass $(X_n) \to 0$ P-stochastisch, aber nicht P-fast sicher.

Satz 1.18 *Falls $X_n \to X$ P-fast sicher, so auch P-stochastisch.*

Definition 1.28 **Limes-Superior einer Folge von Mengen**

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

Bemerkung $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow \omega$ *liegt in unendlich vielen* A_n.

Lemma 1.1 $P(\limsup A_n) = 0 \Rightarrow \lim_n P(A_n) = 0.$

Bew: *Mit* $B_n := \bigcup_{m\geq n} A_m$ *gilt* $B_n \searrow \limsup A_n$

(Stetigkeit von P) $\Rightarrow P(B_m) < \delta$ *für* $m = m_0 \gg 1$

$$\Rightarrow P(A_n) \leq \delta \quad \forall n \geq m_0.$$

Bew: (Satz 1.18) *Folgt aus vorigem Lemma mit*

$A_n := \{|X_n - X| > \epsilon\} = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$

Satz 1.19 *Falls $X_n \to X$ P-stochastisch, so ex. Teilfolge $X_{n'} \to X$ P-fast sicher.*

Lemma 1.2 (Borel-Cantelli) *Falls $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, so ist $\mu(\limsup A_n) = 0$.*

Bew:
- $\sum_n \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) \to 0$ *für* $n \to \infty$.
- $\limsup A_n \subset \bigcup_{m \geq n} A_m \quad \forall n$.

$\Rightarrow P(\limsup A_n) \leq P(\bigcup_{m \geq n} A_m) \leq \sum_{m \geq n} P(A_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

Bew: (Satz 1.19) *Sei (ϵ_k) eine beliebige Nullfolge und $(n_k)_k \nearrow \infty$ so gewählt,*

$$\text{dass } P(\{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k\}) < (\tfrac{1}{2})^k.$$

$\Rightarrow$ *(Borel-Cantelli mit $A_k = \{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k\}$)*

$$P(\{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k \text{unendlich oft}\}) = 0$$

□

Bemerkung *Analog für Folgen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \to E$ von ZV'en mit Werten in einem metrischen bzw. topologischen Raum (E, d) bzw. (E, τ).*

Integralkonvergenzsätze

Satz 1.20 (Dom. Konvergenz) *Falls (X_n) gleichmäßig beschränkte Folge von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist, d.h. exists $K > 0$, s.d. $|X_n| \leq K$ P-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X_n \to X$ P-stochastisch, so folgt*

$$\mathbb{E}_P(|X - X_n|) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Bsp. 1.15 *Auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ sei $X_n(\omega) = \omega^n$ bzw. $Y_n(\omega) = n\omega^n$, dann gilt $X_n \to 0$ und $Y_n \to 0$ fast sicher, aber nur $E(X_n) \to 0$.*

Satz 1.21 (Lemma v. Fatou) *Falls $X_n \geq 0$ und $X_n \to X$ P-stochastisch, so gilt*

$$\mathbb{E}(X) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n).$$

Satz 1.22 (Monotone Konvergenz) *Falls $X_n \geq 0$ und $X_n \nearrow X$ fast sicher, dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \lim \mathbb{E}(X_n).$$

Bemerkung *Geringfügige Verschärfung gegenüber Standardformulierung: Es wird nur die stochastische Konvergenz benötigt[7].*

---

[7] Beweise: Z.B. in [Varadhan]

Vitali'scher Konvergenzssatz

Definition 1.29 *Eine Familie von ZV'en* $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *heißt* **gleichgradig integrierbar** *falls*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{|X_\lambda|>K}|X_\lambda|dP \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Bemerkung $X\in L^1 \Rightarrow \{X\}$ *gleichgr. int'bar,*
denn $Q(A)=\int_A |X|dP$ *ist ein endliches Maß und*
$\{|X|>K\}\searrow N:=\{|X|=\infty\}$ *mit* $Q(N)=\int_N |X|dP=0.$
Analog: Jede endliche Menge $\{X_1,\ldots,X_N\}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ *ist gleichgradig int'bar.*

Satz 1.23 (Vitali) *Für eine Folge* (X_n) *von ZV'en auf* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *gilt* $\mathbb{E}_P(|X_n|)\to 0$ *genau dann, wenn* $(X_n)_n$ *gleichgradig int'bar ist und* $X_n\to 0$ *P-stochastisch.*

Bew: (“$\Rightarrow$”) *Stochastische Konvergenz:*

$$P(|X_n| > \epsilon) = \int_\Omega \mathbb{1}_{|X_n|>\epsilon} dP \le \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |X_n| dP = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_P(|X_n|) \to 0.$$

Gleichgradige Integrierbarkeit: Sei $\epsilon > 0$.

$$\int_{|X_n|>K} |X_n| dP \le \int_{|X_n|>K} |X_n - X_m| dP + \int_{|X_n|>K} |X_m| dP$$

$$\int_{|X_n|>K} |X_n - X_m| dP \le \mathbb{E}(|X_n - X_m|)$$
$$\le \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|X_m|) \le \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für } n \ge m := N_0(\epsilon) \gg 1$$

$$\int_{|X_n|>K} |X_m| dP \le \int_{|X_n|>K, |X_m|\le L} |X_m| dP + \int_{|X_m|>L} |X_m| dP$$

$$\int_{|X_m|>L} |X_m| dP \le \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für } L := L_0(\epsilon, m).$$

$$\int_{|X_n|>K, |X_m|\le L} |X_m| dP \le L\, P(|X_n| > K)$$
$$\le L \frac{1}{K} \sup_n \mathbb{E}|X_n| \le \frac{\epsilon}{3}$$
$$\text{für } K \ge K_0(L, \epsilon), n \ge N_0.$$

Bew.: (“$\Leftarrow$”) *Übungsaufgabe.*

1.5 Verteilung von Zufallsvariablen

Bildmaß

Satz 1.24 *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum, $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ messbar. Dann induziert X ein W-Maß P_X auf $(S, \mathcal{S})$ gemäß*

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)) \quad A \in \mathcal{S}.$$

Definition 1.30 *P_X heißt* **Bildmaß** bzw. **Verteilung von P unter X**.

Bemerkung *Andere Schreibweisen $P_X = P \circ X^{-1} = X_* P$.*

Fall $S = \mathbb{R}$ $t \mapsto F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t)$ *heißt* **Verteilungsfunktion von X**.

Bsp. 1.16 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda))$, $X : \omega \to \mathbb{R}, X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t) \\ &= \lambda(\{\omega \in [0,1] \,|\, \frac{1}{\sqrt{\omega}} \leq t\}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & f.\ t < 1 \\ \lambda(\{\omega \in [0,1] \,|\omega \geq \frac{1}{t^2}\}) & f.\ t \geq 1 \end{array} \right\} = (1 - \frac{1}{t^2})_+. \end{aligned}$$

Definition 1.31 *Sei μ ein W-Maß auf $(E, \mathcal{E})$, dann heißt eine ZV $X : \Omega \to E$ μ-**verteilt**, falls $P_X = \mu$. Schreibweise $X \sim \mu$.*

Integration bzgl. dem Bildmaß (Integral-Transformationssatz)

Satz 1.25 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ messbar. Sei $f : (S, \mathcal{S}) \mapsto (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar, dann gilt*

$$\mathbb{E}_P(f(X)) = \int_S f(s) P_X(ds).$$

Bew: *Aussage gilt nach Def. von P_X, falls $f = \mathbb{1}_A$ für $A \in \mathcal{S}$, und somit auch falls f einfach. Durch monotone Approximation $f_n \nearrow f$ mit einfachen Funktionen folgt die Behauptung.* □

Bemerkung *Analog für beliebige P_X-integrierbare Abbildungen $f : S \mapsto \mathbb{R}$*

Bsp. 1.17 *Für eine ZV X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Verteilung $\mu = P_X$ auf $\mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{E}_P(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, \mu(dx).$$

Varianz

Definition 1.32 *Die* **Varianz** *einer Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$V(X) := \mathbb{E}\left[(X - E(X))^2\right] \in [0, \infty]$$

Satz 1.26 *Falls $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$*

Bew: $E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2X\,E(X) + (E(X))^2] =$
$E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Lemma 1.3 (Tschebyshev Ungl.) *Sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dann gilt für $\delta > 0$*

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \tfrac{1}{\delta} V(X).$$

Bew: *Markov-Ungleichung für $|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0$ und $\varphi(x) = x^2$.*

Korollar 1.3 $X = E(X)$ *P-fast sicher* $\Leftrightarrow V(X) = 0$.

Bew: *"$\Leftarrow$": $\{X \neq E(X)\} = \bigcup_n \{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\}$, mit*
$P(\{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ *nach Tschebyshev. "$\Rightarrow$" klar.*

Beispiele[8]

- Gleichverteilung auf $[0,1]$: Erwartungswert $\frac{1}{2}$, Varianz $\frac{1}{12}$.
- Binomialverteilung auf $[0,1]$: Erwartungswert np, Varianz $np(1-p)$
- Poissonverteilung zum Parameter $\lambda > 0$: Erwartungswert λ, Varianz λ.
- Normalverteilung zu den Parametern $m \in \mathbb{R}, v > 0$: Erwartungswert m, Varianz V.
- Cauchy-Verteilung zum Parameter $\alpha > 0$ auf $\mathbb{R}$:
$$\mu_\alpha(dx) = \frac{\alpha}{\pi}(\alpha^2 + x^2)\lambda(dx).$$
Erwartungswert α, Varianz ∞.

[8] Rechnung an der Tafel, bzw. [Bauer] etc.

Gemeinsame Verteilung

Definition 1.33 *Es seien* $X_1, \dots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen auf dem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *dann heißt mit* $\vec{X} = (X^1, \dots, X^d) \in \mathbb{R}^d$

$$P_{\vec{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto [0,1], \quad P_{\vec{X}}(A) := P(\vec{X}^{-1}(A))$$

die **gemeinsame Verteilung von** $(X_1, \dots, X_n)$.

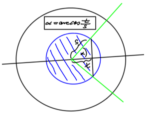
Satz 1.27 $P_{\vec{X}}$ *ist eindeutig bestimmt durch*

$$F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \to [0,1],\ F_{\vec{X}}(t_1, \cdots, t_n) := P(X_1 \le t_1, \cdots, X_d \le t_d).$$

Bew: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{E})$ *mit* $\mathcal{E} \hat{=}$ *Ring der endlichen Vereinigungen von Mengen der Form* $]s_1, t_1] \times \cdots \times]s_d, t_d]$. *(vergl. Stieltjes-Maß)*

Bsp. 1.18 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (B_1 \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{B}(B_1), \frac{1}{\pi}\lambda^2(dx))$

(Gleichverteilung auf dem Einheitsball $B_1 \subset \mathbb{R}^2$



$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad X(\omega) := \omega_x$ *(x-Koordinate)*

$\quad Y(\omega) := \|\omega\|$ *(Abstand zum Urspung)*

Dann gilt für $\vec{X} = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, *mit* $\alpha(t,s) = \arccos(\frac{t}{s})$

$$P_{\vec{X}}(]-\infty, t] \times]-\infty, s]) = \begin{cases} 0 & \text{f. } t < \min(-1, -s) \\ \frac{\pi(1-2\alpha)s^2 + s \sin\alpha}{\pi} & \text{f. } s \in [0,1], |t| \le s \\ \min(s^2, 1) & \text{f. } t > s. \end{cases}$$