Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Universität Leipzig, SoSo 2013

Prof. Dr. Max v. Renesse
`renesse@uni-leipzig.de`
`Sprechstunde: Di 13.15 - 14.45, A 337`

`Übungen:`
`Mo 11.15 -- 12.45 A 314 K. Zimmermann`
`Mi 13.15 -- 14.45 A 314 T. Weihrauch`

Literatur

- S.R.S. Varadhan *Probability Theory*, American Math. Society, 2001
- R. Durret *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 1996

- A. Klenke *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 2008
- H. Bauer *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gryuter, 1990
- H.-O. Georgii *Stochastik*, de Gruyter Verlag, 2009

- H. Bauer *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Verlag, 1992

Skripten

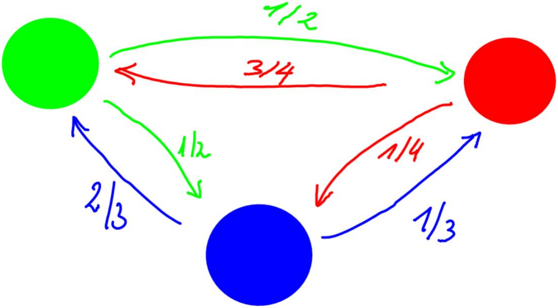
- W. König *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Leipzig & TU Berlin 2012
- M. Röckner *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Bielefeld 2012
- K.-T. Sturm *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Bonn 2012
- P. Pfaffelhuber *Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastische Prozesse, Stochastische Integration und Finanzmathematik*, U Freiburg, 2012

Kapitel 1:

Grundlagen

1.1 Die Kolmogorov'schen Axiome

Ein Beispiel

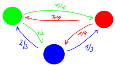


- 'Zufällige Irrfahrt' in zwischen drei Kammern/'Zuständen'.
- Pro Zeitschritt ein Sprung. Start in G.
- 'Übergangswahrscheinlichkeiten' wie angegeben:

$$\forall x, y \in \{G, B, R\} : \quad p_{xy} \in [0, 1].$$

Aufgabe: Mathematische Beschreibung des zufälligen Verlaufs (bei unendlichem Zeithorizont)?

Beispiel, Forts.



- Menge aller Verläufe

$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}, \omega_0 = G\}$$

- Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Verlauf

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} p_{\omega_{i-1},\omega_i} < \prod_{i=1}^{\infty} \frac{3}{4} = 0$$

- Menge aller Ereignisse

$$\mathcal{E} = \{E \mid E \subset \Omega\}$$

Beispiel: $E = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = B, \omega_2 = G\}$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion / Wahrscheinlichkeitsma

$$P : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

Beispiel: $P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = B, \omega_2 = G\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}.$

"Wahrscheinlichkeitsraum" (Kolmogorov 1933)

Definition 1.1 *Ein* **Wahrscheinlichkeitsraum** *ist ein Tripel* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *bestehend aus*

- *einer Menge* Ω
- *einer* σ*-Algebra* $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$
- *und einem Maß*

$$P : \mathcal{F} \to [0,1] \text{ mit } P(\Omega) = 1.$$

Bezeichnungen

- Ω – **Grundraum**
- $\omega \in \Omega$ – **Zufallsparameter**
- $\mathcal{F}$ – **Menge der (beschreibbaren/beobachtbaren) Ereignisse**
- $E \in \mathcal{F}$ – **Ereignis**
- P – **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
- $P(E)$ – **Wahrscheinlichkeit von** E

1.2 Wiederholung: Maße und deren Konstruktion

Mengensysteme

Definition 1.2 *Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ die zugehörige Potenzmenge.*

1. *Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt σ-**Algebra**, falls*
   1) $\Omega \in \mathcal{E}$
   2) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$
   3) $A_k \in \mathcal{E} \, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.
2. *Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt **Ring** falls*
   1) $\emptyset \in \mathcal{E}$
   2) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$
   3) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$

Bemerkung *Ein Ring $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ heißt **Algebra**[1].*

Definition 1.3 *Ein Tupel $(E, \mathcal{E})$ aus einer Menge E und einer σ-Algebra $\mathcal{E} \subset 2^E$ heißt **messbarer Raum**.*

---

[1] “$+$” $\widehat{=}$ “Δ”, “$\cdot$” $\widehat{=}$ “$\cap$”

Definition 1.4 *Für $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset S \subset 2^\Omega \\ S\ \sigma\text{-Algebra}}} S$$

die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.**

Satz 1.1 *$\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra und für jede andere σ-Algebra $S' \subset 2^\Omega$ mit $\mathcal{E} \subset S'$ gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset S'$.*

Definition 1.5 *Es sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann heißt $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$ die* **Borel'sche σ-Algebra** *auf X.*

Maß und Inhalt

Definition 1.6

1. *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{E} \to [0,\ \infty]$ *auf einer* σ*-Algebra* $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ *heißt* **Maß**, *falls*

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

   für alle Folgen $\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{E}$ *mit* $A_k \cap A_l = \emptyset\, \forall k \neq l$.

2. *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{E} \to [0,\ \infty]$ *auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ *heißt* **Inhalt**, *falls*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}, A \cap B = \emptyset.$$

Prämaß auf einem Ring

Definition 1.7 *Ein Inhalt* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \ \infty]$ *auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ *heißt* **Prämaß**, *falls* μ σ*-additiv auf* $\mathcal{E}$ *ist, d.h.*

$$\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

falls $\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{E}$ *mit* $A_k \cap A_l = \emptyset \, \forall k \neq l$ *s.d.* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.

Stetigkeit von (Prä-)Maßen

Satz 1.2 *Für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ sind äquivalent*

1. *μ ist ein Prämaß*
2. *μ ist σ-subadditiv auf $\mathcal{E}$, d.h. für $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$ gilt*

$$\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

3. *Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{E}$ mit $A_n \nearrow A \in \mathcal{E}$ gilt*[2]

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{E}$ ist dies äquivalent zu

4. *Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{E}$ mit $A_n \searrow A \in \mathcal{E}$ gilt*[3]

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

---

[2] D.h. $A_n \subset A_{n+1} \, \forall n$ und $\cup_n A_n = A \in \mathcal{E}$

[3] D.h. $A_n \supset A_{n+1} \, \forall n$ und $\cap_n A_n = A \in \mathcal{E}$

Äußeres Maß

Definition 1.8 *Eine Abbildung* $\mu : 2^\Omega \to [0,\infty]$ *heißt* **äußeres Maß**, *falls*
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
3) $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$

Definition 1.9 *Es sei* μ *ein äußeres Maß auf* 2^Ω. *Eine Menge* $C \subset \Omega$ *heißt* μ-**messbar**, *falls*

$$\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C) \quad \forall A \subset \Omega.$$

Satz 1.3 (Caratheodory) *Es sei* μ *ein äußeres Maß auf* 2^Ω, *dann ist die Menge*

$$\mathcal{M} = \{C \in \Omega \,|\, C \ \mu\text{-messbar}\} \subset 2^\Omega$$

eine σ*-Algebra und* $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ *ein Maß.*

Fortsetzungssatz

Satz 1.4 *Es sei* $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ *ein Inhalt auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$.

- *Die Abbildung* $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$

$$\mu^*(C) := \inf\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \,\Big|\, A_k \in \mathcal{E}, k \in \mathbb{N},\ C \subset \bigcup_k A_k\Big\}$$

  ist ein äußeres Maß auf 2^Ω.

- *Die Mengen* $A \in \mathcal{E}$ *sind* μ^**-messbar, d.h.* $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$.
- *Falls* $\mu : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ *ein Prämaß ist, gilt*

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Eindeutigkeitssatz[4]

Satz 1.5 *Es sei $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra und $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$, d.h.*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad A \cap B \in \mathcal{E} \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Zudem existiere eine Folge $E_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ so dass $\Omega = \bigcup_n E_n$. Dann sind zwei beschränke Maße $\mu, \nu : \mathcal{F} \to [0, \infty[$ identisch genau dann, wenn $\nu(E) = \mu(E) \forall E \in \mathcal{E}$.

Bemerkung *Falls $\mu(\Omega) = \infty$ folgt die Aussage unter der Zusatzannahme, dass μ σ-**endlich** ist: Es ex. eine Folge $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ mit*

$$E_n \nearrow \Omega \text{ und } \mu(E_n) < \infty \, \forall n.$$

[4] Beweis über Dynkin-Systeme: $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt Dynkin-System, falls
1) $\Omega \in \mathcal{E}$
2) $A \in E \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$
3) $A_k \in \mathcal{E} \, \forall k \in \mathbb{N}$ und $A_k \cap A_l = \emptyset \, \forall k \neq l \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.
Das von einer "$\cap$"-stabilen Menge erzeugte D.-System ist eine σ-Algebra.

Beispiel: Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$

Satz 1.6 *Es gibt auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau ein Maß λ mit $\lambda(]a,b]) = b - a$ ('Lebesgue-Maß' auf $\mathbb{R}$).*

Bew: *(Eindeutigkeit) Von halboffenen Intervallen erzeugter Ring*

$$\mathcal{R} := \{I = \cup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] \mid a_1 \leq b_1 \leq a_2 \cdots \leq b_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$

$$\mu(\cup_{i=1}^{n}]a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i.$$

Jede offene Menge $O \subset A$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ darstellen und umgekehrt, folglich gilt

$$\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X).$$

Die Eindeutigkeit einer Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ folgt aus dem Eindeutigkeitssatz, da $\mathcal{R}$ stabil unter '$\cap$'.

Bew: (Forts.) *(Existenz) Behauptung:* μ *ist Prämaß, d.h.* σ*-subadditiv auf* $\mathcal{R}$.

Sei o.B.d.A. $]a, b] \subset \bigcup_k]a_k, b_k]$.

Sei $\epsilon > 0$.

Wähle $b_k' > b_k$, *s.d.* $\mu(]a_k, b_k']) \leq \mu(]a_k, b_k]) + \epsilon 2^{-k}$.

Wähle $a' > a$, *so dass* $\mu(]a', b]) \geq \mu(]a, b]) - \epsilon$.

$$\Rightarrow [a', b] \in \bigcup_k]a_k, b_k'[$$

$\overset{\text{Kompaktheit von } [a', b]}{\Longrightarrow}$ *Ex.* $N \in \mathbb{N}$, *s.d.*

$$]a', b] \subset [a', b] \in \bigcup_{k=1}^N]a_k, b_k'[$$

Also

$$\begin{aligned} \mu(]a', b]) &\leq \textstyle\sum_{k=1}^N \mu(]a_k, b_k']) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^N \mu([a_k, b_k]) + \epsilon \cdot \sum_k 2^{-k} \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k]) + 2\epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(]a, b]) \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k]) + 3\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Also $\mu(]a, b]) \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k])$ *wie behauptet.* $\square$

Bemerkung Analog für das mehrdimensionale Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathbb{R}^d$.

Beispiele, Forts.

Satz 1.7 *Jede rechtsstetige nicht-fallende Funktion* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit*
$$F(x) \to 0 \text{ für } x \to -\infty$$
definiert ein eindeutgiges **(Lebesgue-Stietljes-)Maß** μ *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *vermöge*
$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$
Umgekehrt definiert ein Maß μ *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *ein solche Funktion* F *gemäß*
$$F(x) := \mu(] - \infty, x]).$$

Bew: *Existenz und Eindeutigeit von* μ *analog zum Beweis für* λ.

Umkehrung folgt aus der Stetigkeit von μ*:*
$$x_n \searrow x \quad \Rightarrow \quad] - \infty, x_n] \searrow] - \infty, x]$$
$$\Rightarrow F(x_n) = \mu(] - \infty, x_n]) \searrow \mu(] - \infty, x]) = F(x). \qquad \square$$

Definition 1.10 $F(x) := \mu(] - \infty, x])$ *heißt* **Verteilungsfunktion von** μ.

Nullmengen

Definition 1.11

1. *Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$. Dann heißt $N \subset \Omega$ eine μ-**Nullmenge**, falls ein $F \in \mathcal{F}$ existiert mit*

$$N \subset F \text{ und } \mu(F) = 0.$$

2. *Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ heißt μ-**vollständig**, falls $\mathcal{F}$ bereits alle μ-Nullmengen enthält.*

Definition 1.12

Für eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ ist

$$\overline{\mathcal{F}} := \{A \in 2^{\Omega}, | \exists\, F \in \mathcal{F} : A \Delta F \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\}$$

*die minimale μ-vollständige σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält. $\overline{\mathcal{F}}$ heißt die **Vervollständigung von $\mathcal{F}$ (bzgl. μ)**.*

Definition 1.13

*Eine Eigenschaft ("Prädikat") $e : \Omega \to \{0,1\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **gilt** P**–fast sicher** falls*

$$N := \{\omega \in \Omega \,|\, e(\omega) = 0\} \quad \text{ist } P\text{–Nullmenge.}$$

Bemerkung

Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

Lebesgue-messbare Mengen[5]

Satz 1.8 *Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ und $\mu^* : 2^\Omega :\to [0, \infty]$ das zugeh. äußere Maß, $\mathcal{M} := \{M \subset 2^\Omega \mid M\ \mu^*\text{-messbar}\}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)$ vollständig.*

Definition 1.14 $\mathcal{L}^d := \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A\ {\lambda^d}^*\text{-messbar}\}$

Korollar 1.1 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$ *ist vollständig.*

Satz 1.9 *$A \subset \mathbb{R}^d$ ist λ^d-messbar $\Leftrightarrow$*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists F \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}, \quad U \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen s.d.}$$

$$F \subset A \subset U \text{ und } \lambda^d(U \setminus F) < \epsilon.$$

Satz 1.10 (Banach-Tarski) *Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit nichtleerem Innern gibt es eine Folge von Mengen $C_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen β_k von $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, s.d.*

$$A = \dot{\bigcup}_k C_k \text{ und } B = \dot{\bigcup}_K \beta_k(C_k).$$

Korollar 1.2 *Die Inklusionen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sind echt.*

---

[5] Siehe Elstrodt *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag

Wahrscheinlichkeitsräume – Beispiele

Bsp. 1.1 **Gleichverteilung auf [0,1]**.

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$$

Bsp. 1.2 **Dirac-Punktmaß in $m \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_m(dx))$$

$$mit\ \delta_m(A) = \begin{cases} 1 & falls\ m \in A \\ 0 & falls\ m \notin A. \end{cases}$$

Bsp. 1.3 **Bernoulli-Verteilung auf $\{0,1\}$ zum Parameter $p \in [0,1]$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, (P(\{1\}) = p, P(\{0\}) = 1 - p))$$

Bsp. 1.4 **Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, N\}$.**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{1, \ldots, N\}, 2^{\{1,\ldots,N\}}, P)\ mit\ P(E) = \frac{\#E}{N}$$

Bsp. 1.5 **Binomialverteilung auf $\{0, 1, \ldots, N\}$ zum Parameter $p \in [0,1]$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{0, 1, \ldots, N\}, 2^{\{1,\ldots,N\}}, P)$$
$$mit\ P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beispiele (Forts.)

Bsp. 1.6 **Poisson-Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ zum Parameter $\lambda > 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, \pi_\lambda)$$

mit

$$\pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bsp. 1.7 **Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zum Parameter $\lambda > 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}), \mu_\lambda)$$

mit

$$\mu_\lambda(]a, b]) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Bsp. 1.8 **Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Parametern $m \in \mathbb{R}$ und $v \geq 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_{m,v})$$

mit

$$\mu_{m,v}(]a, b]) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx & \text{falls } v > 0 \\ \delta_m([a, b]) & \text{falls } v = 0. \end{cases}$$

Bemerkung $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ *(siehe Übungen).*

Beispiele (Forts.)

Bsp. 1.9 **Gleichverteilung auf $[0,1]\times[0,1]$**

$$(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1]\times[0,1],\mathcal{B}([0,1]\times[0,1]),\lambda^2)$$

Bsp. 1.10 **Verteilung auf $\mathbb{R}^d$ mit Dichte**

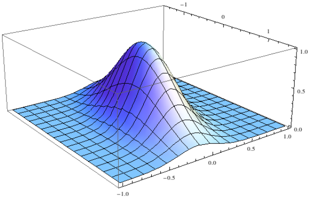
$$(\Omega,\mathcal{F},P)=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\mu)$$

$$\text{mit } \mu(A):=\int_A \varphi(x)\lambda^d(dx),\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$\varphi\in C(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_{\geq 0}),\quad \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\lambda^d(dx)=1.$$

Spezialfall **Mehrdimensionale Gauß-Verteilung**

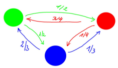
$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det C}}e^{-\frac{1}{2}\langle (x-m),C^{-1}(x-m)\rangle_{\mathbb{R}^d}}$$



wobei $m\in\mathbb{R}^d$ **'Erwartungswert'**

$C\in R^{d\times d}_{symm,>0}$ **'Kovarianzmatrix'**

Beispiele (Forts.)



Konstruktion eines W-Raumes zur Beschreibung der Irrfahrt zwischen drei Zuständen:

"Alphabet"	$\mathcal{A} = \{R, G, B\}$
Grundraum	$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}, \omega_0 = G\} = \{G\} \times \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$
σ-Algebra	$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.
"Zylindermenge"	$Z \in \mathcal{Z} \subset 2^{\Omega} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_N \subset \mathcal{A}$, s.d. $Z = A_1 \times \cdots A_N \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \cdots$ $\Rightarrow\ \mathcal{Z}$ Ring mit $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}$.
Inhalt	$P_0 : \mathcal{Z} \to [0, 1]$ $P_0(A_1 \times \cdots A_N \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \cdots) := \sum_{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N) \in \{G\} \times A_1 \times \cdots \cdots A_N} \prod_{i=1}^{N} p_{\omega_{i-1}, \omega_i}$.
Wahrscheinlichkeitsmaß	P_0 ist Prämaß auf $\mathcal{Z} \Rightarrow$ definiert eind. Fortsetzung P auf $\mathcal{F}$.