Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Universität Leipzig, SoSo 2013

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@uni-leipzig.de
Sprechstunde: Di 13.15 - 14.45, A 337

Übungen:
Mo 11.15 -- 12.45 A 314 K. Zimmermann
Mi 13.15 -- 14.45 A 314 T. Weihrauch

Literatur

- S.R.S. Varadhan *Probability Theory*, American Math. Society, 2001
- R. Durret *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 1996

- A. Klenke *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 2008
- H. Bauer *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gryuter, 1990
- H.-O. Georgii *Stochastik*, de Gruyter Verlag, 2009

- H. Bauer *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Verlag, 1992

Skripten

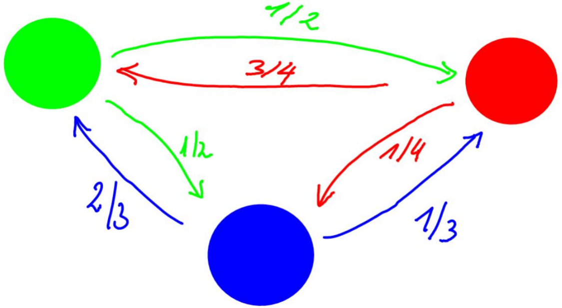
- W. König *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Leipzig & TU Berlin 2012
- M. Röckner *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Bielefeld 2012
- K.-T. Sturm *Wahrscheinlichkeitstheorie*, U Bonn 2012
- P. Pfaffelhuber *Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastische Prozesse, Stochastische Integration und Finanzmathematik*, U Freiburg, 2012

Kapitel 1:

Grundlagen

1.1 Die Kolmogorov'schen Axiome

Ein Beispiel

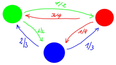


- 'Zufällige Irrfahrt' in zwischen drei Kammern/'Zuständen'.
- Pro Zeitschritt ein Sprung. Start in G.
- 'Übergangswahrscheinlichkeiten' wie angegeben:

$$\forall x, y \in \{G, B, R\}: \quad p_{xy} \in [0, 1].$$

Aufgabe: Mathematische Beschreibung des zufälligen Verlaufs (bei unendlichem Zeithorizont)?

Beispiel, Forts.



- Menge aller Verläufe

$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}, \omega_0 = G\}$$

- Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Verlauf

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} p_{\omega_{i-1},\omega_i} < \prod_{i=1}^{\infty} \frac{3}{4} = 0$$

- Menge aller Ereignisse

$$\mathcal{E} = \{E \mid E \subset \Omega\}$$

Beispiel: $$E = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = B, \omega_2 = G\}$$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion / Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

Beispiel: $$P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = B, \omega_2 = G\}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{6}.$$

“Wahrscheinlichkeitsraum” (Kolmogorov 1933)

Definition 1.1 *Ein* **Wahrscheinlichkeitsraum** *ist ein Tripel* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *bestehend aus*

- *einer Menge* Ω
- *einer* σ*-Algebra* $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$
- *und einem Maß*

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1] \text{ mit } P(\Omega) = 1.$$

Bezeichnungen

- Ω – **Grundraum**
- $\omega \in \Omega$ – **Zufallsparameter**
- $\mathcal{F}$ – **Menge der (beschreibbaren/beobachtbaren) Ereignisse**
- $E \in \mathcal{F}$ – **Ereignis**
- P – **Wahrscheinlichkeitsmaß**.
- $P(E)$ – **Wahrscheinlichkeit von** E

1.2 Wiederholung: Maße und deren Konstruktion

Mengensysteme

Definition 1.2 *Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ die zugehörige Potenzmenge.*

1. *Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt σ-**Algebra**, falls*
   1) $\Omega \in \mathcal{E}$
   2) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$
   3) $A_k \in \mathcal{E} \, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.

2. *Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt **Ring** falls*
   1) $\emptyset \in \mathcal{E}$
   2) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$
   3) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$

Bemerkung *Ein Ring $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ heißt **Algebra**[1].*

Definition 1.3 *Ein Tupel $(E, \mathcal{E})$ aus einer Menge E und einer σ-Algebra $\mathcal{E} \subset 2^E$ heißt **messbarer Raum**.*

---

[1] "+" $\hat{=}$ "Δ", "·" $\hat{=}$ "$\cap$"

Definition 1.4 *Für $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset S \subset 2^\Omega \\ S\ \sigma\text{-Algebra}}} S$$

die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.**

Satz 1.1 *$\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra und für jede andere σ-Algebra $S' \subset 2^\Omega$ mit $\mathcal{E} \subset S'$ gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset S'$.*

Definition 1.5 *Es sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann heißt $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$ die* **Borel'sche σ-Algebra** *auf X.*

Maß und Inhalt

Definition 1.6

1. *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *auf einer* σ*-Algebra* $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ *heißt* **Maß**, *falls*

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

   für alle Folgen $\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{E}$ *mit* $A_k \cap A_l = \emptyset \, \forall k \neq l$.

2. *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ *heißt* **Inhalt**, *falls*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}, A \cap B = \emptyset.$$

Prämaß auf einem Ring

Definition 1.7 *Ein Inhalt* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ *heißt* **Prämaß**, *falls* μ σ*-additiv auf* $\mathcal{E}$ *ist, d.h.*

$$\mu\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

falls $\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{E}$ *mit* $A_k \cap A_l = \emptyset \; \forall k \neq l$ *s.d.* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.

Stetigkeit von (Prä-)Maßen

Satz 1.2 *Für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ sind äquivalent*

1. *μ ist ein Prämaß*
2. *μ ist σ-subadditiv auf $\mathcal{E}$, d.h. für $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$ gilt*

$$\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

3. *Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{E}$ mit $A_n \nearrow A \in \mathcal{E}$ gilt*[2]

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{E}$ ist dies äquivalent zu

4. *Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{E}$ mit $A_n \searrow A \in \mathcal{E}$ gilt*[3]

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

---

[2] D.h. $A_n \subset A_{n+1} \, \forall n$ und $\cup_n A_n = A \in \mathcal{E}$

[3] D.h. $A_n \supset A_{n+1} \, \forall n$ und $\cap_n A_n = A \in \mathcal{E}$

Äußeres Maß

Definition 1.8 *Eine Abbildung* $\mu : 2^\Omega \to [0,\infty]$ *heißt* **äußeres Maß**, *falls*
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
3) $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$

Definition 1.9 *Es sei* μ *ein äußeres Maß auf* 2^Ω. *Eine Menge* $C \subset \Omega$ *heißt* μ-**messbar**, *falls*

$$\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C) \quad \forall A \subset \Omega.$$

Satz 1.3 (Caratheodory) *Es sei* μ *ein äußeres Maß auf* 2^Ω, *dann ist die Menge*

$$\mathcal{M} = \{C \in \Omega \,|\, C \ \mu\text{-messbar}\} \subset 2^\Omega$$

eine σ*-Algebra und* $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ *ein Maß.*

Fortsetzungssatz

Satz 1.4 *Es sei* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *ein Inhalt auf einem Ring* $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$.

- *Die Abbildung* $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$

  $$\mu^*(C) := \inf\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \,\Big|\, A_k \in \mathcal{E}, k \in \mathbb{N},\ C \subset \bigcup_k A_k\Big\}$$

  ist ein äußeres Maß auf 2^Ω.
- *Die Mengen* $A \in \mathcal{E}$ *sind* μ^**-messbar, d.h.* $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$.
- *Falls* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *ein Prämaß ist, gilt*

  $$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Eindeutigkeitssatz[4]

Satz 1.5 *Es sei $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ eine σ-Algebra und $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$, d.h.*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad A \cap B \in \mathcal{E} \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Zudem existiere eine Folge $E_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$ so dass $\Omega = \bigcup_n E_n$. Dann sind zwei beschränke Maße $\mu, \nu : \mathcal{F} \to [0, \infty[$ identisch genau dann, wenn $\nu(E) = \mu(E) \forall E \in \mathcal{E}$.

Bemerkung *Falls $\mu(\Omega) = \infty$ folgt die Aussage unter der Zusatzannahme, dass μ σ-**endlich** ist: Es ex. eine Folge $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ mit*

$$E_n \nearrow \Omega \text{ und } \mu(E_n) < \infty \, \forall n.$$

---

[4] Beweis über Dynkin-Systeme: $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt Dynkin-System, falls
1) $\Omega \in \mathcal{E}$
2) $A \in E \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$
3) $A_k \in \mathcal{E} \, \forall k \in \mathbb{N}$ und $A_k \cap A_l = \emptyset \, \forall k \neq l \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{E}$.
Das von einer "$\cap$"-stabilen Menge erzeugte D.-System ist eine σ-Algebra.

Beispiel: Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$

Satz 1.6 *Es gibt auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau ein Maß λ mit $\lambda(]a,b]) = b - a$ ('Lebesgue-Maß' auf $\mathbb{R}$).*

Bew: *(Eindeutigkeit) Von halboffenen Intervallen erzeugter Ring*

$$\mathcal{R} := \{ I = \cup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] \mid a_1 \leq b_1 \leq a_2 \cdots \leq b_n, n \in \mathbb{N} \}.$$

Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$

$$\mu(\cup_{i=1}^{n}]a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i.$$

Jede offene Menge $O \subset A$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ darstellen und umgekehrt, folglich gilt

$$\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X).$$

Die Eindeutigkeit einer Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ folgt aus dem Eindeutigkeitssatz, da $\mathcal{R}$ stabil unter '$\cap$'.

Bew: (Forts.) *(Existenz) Behauptung:* μ *ist Prämaß, d.h.* σ*-additiv auf* $\mathcal{R}$.

$\overset{\text{Satz 1.2}}{\Longrightarrow}$ *Genügt zu zeigen:* μ *ist* σ*-subadditiv auf* $\mathcal{R}$.

Sei o.B.d.A. $]a,b] \subset \bigcup_k]a_k, b_k]$.

Sei $\epsilon > 0$.

Wähle $b_k' > b_k$*, s.d.* $\mu(]a_k, b_k']) \leq \mu(]a_k, b_k]) + \epsilon 2^{-k}$.

Wähle $a' > a$*, so dass* $\mu(]a', b]) \geq \mu(]a, b]) - \epsilon$.

$$\Rightarrow [a', b] \in \bigcup_k]a_k, b_k'[$$

$\overset{\text{Kompaktheit von } [a', b]}{\Longrightarrow}$ *Ex.* $N \in \mathbb{N}$*, s.d.*

$$]a', b] \subset [a', b] \in \bigcup_{k=1}^N]a_k, b_k'[$$

Also

$$\mu(]a', b]) \leq \sum_{k=1}^N \mu(]a_k, b_k'])$$
$$\leq \sum_{k=1}^N \mu([a_k, b_k]) + \epsilon \cdot \sum_k 2^{-k} \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k]) + 2\epsilon$$

$$\Rightarrow \mu(]a, b]) \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k]) + 3\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Also $\mu(]a, b]) \leq \sum_k \mu(]a_k, b_k])$ *wie behauptet.* $\square$

Bemerkung Analog für das mehrdimensionale Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathbb{R}^d$.

Beispiele, Forts.

Satz 1.7 *Jede rechtsstetige nicht-fallende Funktion* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit*

$$F(x) \to 0 \text{ für } x \to -\infty$$

definiert ein eindeutgiges **(Lebesgue-Stietljes-)Maß** μ *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *vermöge*

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Umgekehrt definiert ein Maß μ *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *ein solche Funktion* F *gemäß*

$$F(x) := \mu(] - \infty, x]).$$

Bew: *Existenz und Eindeutigeit von* μ *analog zum Beweis für* λ*.*

Umkehrung folgt aus der Stetigkeit von μ*:*

$$x_n \searrow x \quad \Rightarrow \quad] - \infty, x_n] \searrow] - \infty, x]$$
$$\Rightarrow F(x_n) = \mu(] - \infty, x_n]) \searrow \mu(] - \infty, x]) = F(x). \qquad \square$$

Definition 1.10 $F(x) := \mu(] - \infty, x])$ *heißt* **Verteilungsfunktion von** μ*.*

Nullmengen

Definition 1.11

1. *Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$. Dann heißt $N \subset \Omega$ eine μ-**Nullmenge**, falls ein $F \in \mathcal{F}$ existiert mit*

$$N \subset F \text{ und } \mu(F) = 0.$$

2. *Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ heißt μ-**vollständig**, falls $\mathcal{F}$ bereits alle μ-Nullmengen enthält.*

Definition 1.12 *Für eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ ist*

$$\overline{\mathcal{F}} := \{A \in 2^{\Omega}, | \exists\, F \in \mathcal{F} : A \Delta F \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\}$$

die minimale μ-vollständige σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält. $\overline{\mathcal{F}}$ heißt die **Vervollständigung von $\mathcal{F}$ (bzgl. μ)**.

Definition 1.13 *Eine Eigenschaft ("Prädikat") $e : \Omega \to \{0, 1\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$* **gilt P–fast sicher** *falls*

$$N := \{\omega \in \Omega \,|\, e(\omega) = 0\} \quad \text{ist } P\text{–Nullmenge.}$$

Bemerkung *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

Lebesgue-messbare Mengen[5]

Satz 1.8 *Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ und $\mu^* : 2^\Omega :\to [0, \infty]$ das zugeh. äußere Maß, $\mathcal{M} := \{M \subset \Omega \mid M\ \mu^*\text{-messbar}\}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)$ vollständig.*

Definition 1.14 $\mathcal{L}^d := \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A\ {\lambda^d}^*\text{-messbar}\}$

Korollar 1.1 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \lambda^d)$ *ist vollständig.*

Satz 1.9 *$A \subset \mathbb{R}^d$ ist λ^d-messbar $\Leftrightarrow$*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists F \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}, \quad U \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen s.d.}$$

$$F \subset A \subset U \text{ und } \lambda^d(U \setminus F) < \epsilon.$$

Satz 1.10 (Banach-Tarski) *Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit nichtleerem Innern gibt es eine Folge von Mengen $C_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen β_k von $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, s.d.*

$$A = \dot{\bigcup_k} C_k \text{ und } B = \dot{\bigcup_K} \beta_k(C_k).$$

Korollar 1.2 *Die Inklusionen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sind echt.*

[5] Siehe Elstrodt *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag

Wahrscheinlichkeitsräume – Beispiele

Bsp. 1.1 **Gleichverteilung auf [0,1]**.

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$$

Bsp. 1.2 **Dirac-Punktmaß in $m \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_m(dx))$$
$$mit\ \delta_m(A) = \begin{cases} 1 & falls\ m \in A \\ 0 & falls\ m \notin A. \end{cases}$$

Bsp. 1.3 **Bernoulli-Verteilung auf $\{0,1\}$ zum Parameter $p \in [0,1]$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, (P(\{1\}) = p, P(\{0\}) = 1 - p))$$

Bsp. 1.4 **Gleichverteilung auf $\{1, \dots, N\}$.**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{1, \dots, N\}, 2^{\{1,\dots,N\}}, P)\ mit\ P(E) = \frac{\#E}{N}$$

Bsp. 1.5 **Binomialverteilung auf $\{0, 1, \dots, N\}$ zum Parameter** $p \in [0,1]$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{0, 1, \dots, N\}, 2^{\{1,\dots,N\}}, P)$$
$$mit\ P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beispiele (Forts.)

Bsp. 1.6 **Poisson-Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ zum Parameter $\lambda > 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, \pi_\lambda)$$

mit

$$\pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \tfrac{\lambda^k}{k!}.$$

Bsp. 1.7 **Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zum Parameter $\lambda > 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}), \mu_\lambda)$$

mit

$$\mu_\lambda(]a, b]) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Bsp. 1.8 **Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Parametern $m \in \mathbb{R}$ und $v \geq 0$**

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_{m,v})$$

mit

$$\mu_{m,v}(]a, b]) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx & \textit{falls } v > 0 \\ \delta_m([a, b]) & \textit{falls } v = 0. \end{cases}$$

Bemerkung $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ *(siehe Übungen).*

Beispiele (Forts.)

Bsp. 1.9 **Gleichverteilung auf $[0,1]\times[0,1]$**

$$(\Omega,\mathcal{F},P) = ([0,1]\times[0,1], \mathcal{B}([0,1]\times[0,1]), \lambda^2)$$

Bsp. 1.10 **Verteilung auf $\mathbb{R}^d$ mit Dichte**

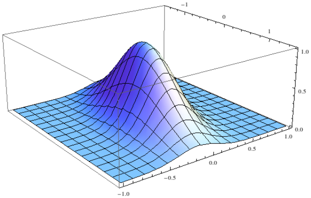
$$(\Omega,\mathcal{F},P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$$

$$\textit{mit } \mu(A) := \int_A \varphi(x)\lambda^d(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_{\geq 0}), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\lambda^d(dx) = 1.$$

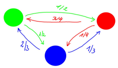
Spezialfall **Mehrdimensionale Gauß-Verteilung**

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}\langle (x-m), C^{-1}(x-m)\rangle_{\mathbb{R}^d}}$$



wobei $m \in \mathbb{R}^d$ **'Erwartungswert'**
$C \in R^{d\times d}_{symm,>0}$ **'Kovarianzmatrix'**

Beispiele (Forts.)



Konstruktion eines W-Raumes zur Beschreibung der Irrfahrt zwischen drei Zuständen:

"Alphabet" $\mathcal{A} = \{R, G, B\}$

Grundraum $\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}, \omega_0 = G\} = \{G\} \times \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

σ-Algebra $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

"Zylindermenge" $Z \in \mathcal{Z} \subset 2^{\Omega} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_N \subset \mathcal{A}$, s.d.

$$Z = A_1 \times \cdots A_N \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \cdots$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{Z} \text{ Ring mit } \sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}.$$

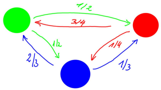
Inhalt $P_0 : \mathcal{Z} \to [0, 1]$

$$P_0(A_1 \times \cdots A_N \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \cdots) := \sum_{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N) \in \{G\} \times A_1 \times \cdots \cdots A_N} \prod_{i=1}^{N} p_{\omega_{i-1}, \omega_i}.$$

Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 ist Prämaß auf $\mathcal{Z} \Rightarrow$ definiert eind. Fortsetzung P auf $\mathcal{F}$.

1.3 Zufallsvariablen

Beispiel



- Irrfahrt zwischen drei Zuständen
  Start in G bei $t = 0$, Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$
- Grundraum

$$\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T) \in \{G, R, B\}^{T+1}, \omega_0 = G\}$$

- σ-Algebra

$$\mathcal{F} = \{E \mid E \subset \Omega\} = 2^{\Omega}$$

- Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1], \quad P(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{T} p_{\omega_{i-1}, \omega_i}$$

- Trefferzeit vom Zustand B

$$\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \tau(\omega) := \inf\{k \in \{0, \ldots, T\} \,|\omega_k = B\}$$

- Beispiel: Wette auf frühes Treffen von B

$$C : \Omega \to [0, 1], C(\omega) = e^{-\tau(\omega)}.$$

Messbare Abbildungen

Definition 1.15

- *Eine Abbildung* $X : E \mapsto F$ *zwischen zwei messbaren Räumen* $(E, \mathcal{E})$ *und* $(F, \mathcal{F})$ *heißt* ($\mathcal{E}/\mathcal{F}$-)**messbar**, *falls*
$$X^{-1}(A) \in \mathcal{E} \text{ für alle } A \in \mathcal{F}.$$
- *Eine* $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*-messbare Abbildung*[6]
$$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$
auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt* **(reelle) Zufallsvariable** *oder* **(reelle) Zufallsgröße**.

Bemerkung

$A \subset \Omega$ *messbar* $\Leftrightarrow$ **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ *ist messbar*
$$\text{mit } \mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R},\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

[6] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) :\Leftrightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Sprechweisen

Definition 1.16 *Von einer Abbildung $X : E \mapsto F$ in einen messbaren Raum $(F, \mathcal{F})$* **erzeugte σ-Algebra**

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) \,|\, A \in \mathcal{F}\}$$

Bemerkung $X : E \mapsto F$ $\mathcal{E}/\mathcal{F}$*-messbar* $\Leftrightarrow \sigma(X) \subset \mathcal{E}$

Definition 1.17

- *Eine reelle ZV X heißt* **endlich**, *falls $X(\omega) \in \mathbb{R} \, \forall \, \omega \in \Omega$.*
- *X heißt* **beschränkt**, *falls ein $K > 0$ existiert, so dass*
$$|X(\omega)| \leq K \, \forall \, \omega \in \Omega.$$

Approximation durch Treppenfunktionen

Definition 1.18 *Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **einfach**, *falls*

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \overline{\mathbb{R}}, \quad A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{F} : \ \Omega = \bigcup_{i=1,\ldots N} A_i$$

mit (A_i) paarweise disjunkt, so dass

$$X(e) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(e).$$

Satz 1.11 *Jede beschränkte Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ lässt sich durch eine Folge $(X_n)_n$ von einfachen Zufallsvariablen (X_n) auf Ω gleichmäßig approximieren, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega) - X_n(\omega)| = 0.$$

Bew: *Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere $X_n(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{X^{-1}(]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])}(\omega)$.* $\square$

Bemerkung

- *Analog: Für $X \geq 0$ endliche ZV ex Folge (X_n) einfacher ZV'n*
  $$X_n(\omega) \nearrow X(\omega)\, \forall\, \omega \in \Omega.$$
- *Summen, Produkte etc. von einfachen ZV'n sind einfache ZV'n.*

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Definition 1.19 *Für eine einfache Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ heißt*

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, P(A_i) =: \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

das **Integral von X (bzgl. P)** *bzw.* **Erwartungswert**.

Schreibweisen $\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \mathbb{E}_P(X) = \langle X \rangle_P$.

Bemerkung

- $\mathbb{E}_P(X)$ *hängt nicht von der genauen Darstellung von X ab.*
- $\mathbb{E}_P(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}_P(X) + \mu \mathbb{E}_P(Y)$.
- $|\mathbb{E}_P(X)| \leq \mathbb{E}_P(|X|) \leq \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$

Integral für beschränkte Zufallsvariablen

Satz 1.12 *Falls X eine beschränkte ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ex.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega) P(d\omega) =: \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

für jede gleichmäßige Approximation $X_n \to X$ von X durch einfache ZV'en, unabhängig von der genauen Wahl von (X_n).

Bew: *Sei $X_n \to X$ gleichmäßig und $Y_n \to X$ gleichmäßig auf Ω*

$\Rightarrow X_n - Y_n \to 0$ *gleichmäßig auf* Ω.

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(Y_n)| &= |\mathbb{E}(X_n - Y_n)| \\ &\leq \sup_\omega |X_n(\omega) - Y_n(\omega)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Analog:

$$|\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_m)| \leq \sup_{\omega\in\Omega} |X_n(\omega) - X_m(\omega)| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\Rightarrow (\mathbb{E}(X_n))_n$ *reelle Cauchy-Folge mit* $\lim \mathbb{E}(X_n) = \lim \mathbb{E}(Y_n)$. $\square$

Integral für nichtnegative Zufallsvariablen

Satz 1.13 *Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar und eine Folge (X_n) einfacher ZV'en mit*

$$X_n(\omega) \nearrow X(\omega) \, \forall \omega \in \Omega.$$

Dann ist

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega X_n(\omega) P(d\omega) \in [0, \infty]$$

unabhängig von der genauen Wahl von (X_n).

Bsp. 1.11 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$,

$$X, Y : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, X(\omega) = \tfrac{1}{\sqrt{\omega}}, Y(\omega) = \tfrac{1}{\omega}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \textstyle\int_0^1 \omega^{-1/2} d\omega = 2\sqrt{\omega}\Big|_{\omega=0}^{\omega=1} = 2 < \infty.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \textstyle\int_0^1 \omega^{-1} d\omega = \ln(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=1} = 0 - (-\infty) = \infty.$$

Integral – Allgemeiner Fall

Definition 1.20 *Eine ZV $X : (\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt (absolut)* **integrierbar**, *falls*

$$\mathbb{E}_P(X_+) < \infty \text{ und } \mathbb{E}_P(X_-) < \infty$$

mit

$$X_\pm : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad X_\pm(\omega) = \max(\pm X(\omega), 0).$$

In dem Fall definiert man das **Integral von X (bzgl.** P**)** *als*

$$\mathbb{E}_P(X) := \mathbb{E}_P(X_+) - \mathbb{E}_P(X_-).$$

Bemerkung

- *Äquivalente Bedingung* $\mathbb{E}_P(|X|) < \infty$.
- *Gelegentlich verlangt man nur die* **einseitige Integrierbarkeit**

$$\min(\mathbb{E}_P(X_+), \mathbb{E}_P(X_-)) < \infty$$

$\rightsquigarrow \mathbb{E}_P(X) := \mathbb{E}_P(X_+) - \mathbb{E}_P(X_-) \in \overline{\mathbb{R}}$ *eindeutig definiert.*

Integral: Nachträge

Definition 1.21 *Für X ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbb{E}_P(X; A) := \int_A X dP := \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega).$$

Definition 1.22 *Zwei ZV X, Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißen* **äquivalent**, *falls $X = Y$* **fast sicher**, *d.h. falls*

$$\{\omega \in \Omega, | X(\omega) \neq Y(\omega)\} \text{ ist } P\text{–Nullmenge.}$$

Definition 1.23

- $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \geq 0$, *falls X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit*
$$\mathbb{E}_P(|X|^p) < \infty.$$
- $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *falls*
$$\exists K \geq 0, \text{ s.d. } |X| \leq K \text{ } P\text{-fast sicher.}$$

Bsp. 1.12 $X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \in L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)) \setminus L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

Bemerkung *Analog* **vektorwertige ZV** $X = (X^1, \ldots, X^d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$E(X) := (E(X^1), \ldots E(X^d)) \in \mathbb{R}^d.$$

Nachträge (Forts.): Maße mit Dichten auf $\mathbb{R}$

Definition 1.24 *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **absolut stetig**, *falls ex. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar*

$$F(a) - F(b) = \int_b^a m(s)\, ds \; \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Bsp. 1.13 $F(x) = (1 - \frac{1}{x^2})_+ = \int_{-\infty}^x m(t)dt$, $m(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 1 \\ \frac{2}{t^3} & \text{falls } t \geq 1. \end{cases}$

Satz 1.14 *Sei μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}$ mit $F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x m(t)dt$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)m(x)dx$$

für alle messbaren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bew: *Klar für $f = \mathbb{1}_{]a,b]}$. Für allgemeine f folgt die Aussage durch Approximation mit einfachen Zufallsvariablen.*

Definition 1.25 *Ein Maß auf μ auf $\mathbb{R}$ heißt* **absolut stetig** *:$\Leftrightarrow$ F_μ ist abs. stetig. In dem Fall heißt m mit $\mu(dx) = m(x)dx$* **Dichte** *vom μ bzgl. λ.*

Nachträge (Forts.): Ungleichungen

Satz 1.15 (Cauchy-Schwarz) *$\mathbb{E}(X \cdot Y) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ für alle $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Bew: *Mit Standardargument, da $\mathbb{E}[(\lambda X + \mu Y)^2] \geq 0 \, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.* $\square$

Satz 1.16 (Markov) *Sei $X \geq 0$ und $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht-fallend, dann*

$$P(X \geq \delta) \leq \tfrac{1}{\varphi(\delta)} \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Bew:

$$P(X \geq \delta) = \mathbb{E}(\mathbb{1}; X \geq \delta) = \mathbb{E}(\frac{\varphi(\delta)}{\varphi(\delta)}; X \geq \delta)$$

$$\leq \mathbb{E}(\frac{\varphi(X)}{\varphi(\delta)}; X \geq \delta) \leq \frac{1}{\varphi(\delta)} \mathbb{E}(\varphi(X)) \qquad \square$$

Satz 1.17 (Jensen) *Falls X eine reelle ZV und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Bew: *Sei $m := \mathbb{E}(X)$. Konvexität von $\varphi \Rightarrow \exists \, s \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$\varphi(x) \geq \varphi(m) + s(x - m) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \; \varphi(X) \geq \varphi(m) + s(X - m)$$

$$\Rightarrow \; \mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(m) + s(\mathbb{E}(X) - m) = \varphi(\mathbb{E}(X)). \qquad \square$$

1.4 Konvergenz von Zufallsvariablen

Fast sichere und stochastische Konvergenz

Definition 1.26 *Eine Folge* $(X_n)_n$ *von ZV'en auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **konvergiert** P-**stochastisch** *gegen die ZV* X*, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \epsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad .$$

Bemerkung *Andere Bezeichnung:* **Konvergenz im Maß/in Wahrscheinlichkeit***.*

Definition 1.27 *Eine Folge* $(X_n)_n$ *von ZV'en auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **konvergiert** P-**fast-sicher** *gegen die ZV* X*, falls*

$$X_n(.) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(.) \quad P\text{-fast sicher},$$

d.h. $\exists$ *P-Nullmenge* N*, s.d.* $X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N$*.*

Bsp. 1.14 *Es sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ *und* (q_n) *eine Abzählung von* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$*. Dann gilt für*

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ X_n := \mathbb{1}_{]q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}[}$$

dass $(X_n) \to 0$ *P-stochastisch, aber nicht P-fast sicher.*

Satz 1.18 *Falls $X_n \to X$ P-fast sicher, so auch P-stochastisch.*

Definition 1.28 **Limes-Superior einer Folge von Mengen**

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

Bemerkung $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow \omega$ *liegt in unendlich vielen* A_n.

Lemma 1.1 $P(\limsup A_n) = 0 \Rightarrow \lim_n P(A_n) = 0.$

Bew: *Mit* $B_n := \bigcup_{m\geq n} A_m$ *gilt* $B_n \searrow \limsup A_n$

$$\overset{\text{Stetigkeit von } P}{\Longrightarrow} P(B_m) < \delta \text{ für } m = m_0 \gg 1$$

$$\Rightarrow P(A_n) \leq \delta \quad \forall n \geq m_0.$$

Bew: (Satz 1.18) *Folgt aus vorigem Lemma mit*

$A_n := \{|X_n - X| > \epsilon\} = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$ □

Satz 1.19 *Falls* $X_n \to X$ *P-stochastisch, so ex. Teilfolge* $X_{n'} \to X$ *P-fast sicher.*

Lemma 1.2 (Borel-Cantelli) *Falls* $\sum_n \mu(A_n) < \infty$*, so ist* $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Bew:
- $\sum_n \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) \to 0$ *für* $n \to \infty$.
- $\limsup A_n \subset \bigcup_{m \geq n} A_m \quad \forall n$.

$\Rightarrow P(\limsup A_n) \leq P(\bigcup_{m \geq n} A_m) \leq \sum_{m \geq n} P(A_m) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$

Bew: (Satz 1.19) *Sei* (ϵ_k) *eine beliebige Nullfolge und* $(n_k)_k \nearrow \infty$ *so gewählt,*

$$\text{dass } P(\{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k\}) < (\tfrac{1}{2})^k.$$

$\Rightarrow$ *(Borel-Cantelli mit* $A_k = \{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k\}$*)*

$$P(\{|X_{n_k} - X| > \epsilon_k \text{unendlich oft}\}) = 0 \qquad \square$$

Bemerkung *Analog für Folgen* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Omega \to E$ *von ZV'en mit Werten in einem metrischen bzw. topologischen Raum* (E, d) *bzw.* (E, τ).

Integralkonvergenzsätze

Satz 1.20 (Dom. Konvergenz) *Falls (X_n) Folge von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $X_n \to X$ P-stochastisch und $\exists Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $|X_n| \leq Y$ P-fast sicher $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dann*

$$\mathbb{E}_P(|X - X_n|) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Bsp. 1.15 *Auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ sei $X_n(\omega) = \omega^n$ bzw. $Y_n(\omega) = n\omega^n$, dann gilt $X_n \to 0$ und $Y_n \to 0$ fast sicher, aber nur $\mathbb{E}(X_n) \to 0$.*

Satz 1.21 (Lemma v. Fatou) *Falls $X_n \geq 0$ und $X_n \to X$ P-stochastisch, so gilt*

$$\mathbb{E}(X) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n).$$

Satz 1.22 (Monotone Konvergenz) *Falls $X_n \geq 0$ und $X_n \nearrow X$ fast sicher, dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \lim \mathbb{E}(X_n).$$

Bemerkung *Geringfügige Verschärfung gegenüber Standardformulierung: Es wird nur die stochastische Konvergenz benötigt[7].*

---

[7] Beweise: Z.B. in [Varadhan]

Vitali'scher Konvergenzssatz

Definition 1.29 *Eine Familie von ZV'en* $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *heißt* **gleichgradig integrierbar** *falls*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{|X_\lambda|>K}|X_\lambda|dP \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Bemerkung $X\in L^1 \Rightarrow \{X\}$ *gleichgr. int'bar,*
denn $Q(A)=\int_A|X|dP$ *ist ein endliches Maß und* $\{|X|>K\}\searrow N:=\{|X|=\infty\}$ *mit* $Q(N)=\int_N|X|dP=0.$
Analog: Jede endliche Menge $\{X_1,\ldots,X_N\}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ *ist gleichgradig int'bar.*

Satz 1.23 (Vitali) *Für eine Folge* (X_n) *von ZV'en auf* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *gilt* $\mathbb{E}_P(|X_n|)\to 0$ *genau dann, wenn* $(X_n)_n$ *gleichgradig int'bar ist und* $X_n\to 0$ P*-stochastisch.*

Bew: (“$\Rightarrow$”) *Stochastische Konvergenz:*

$$P(|X_n| > \epsilon) = \int_\Omega 1\!\!1_{|X_n|>\epsilon} dP \le \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |X_n| dP = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}_P(|X_n|) \to 0.$$

Gleichgradige Integrierbarkeit: Sei $\epsilon > 0$.

$$\int_{|X_n|>K} |X_n| dP \le \int_{|X_n|>K} |X_n - X_m| dP + \int_{|X_n|>K} |X_m| dP$$

$$\int_{|X_n|>K} |X_n - X_m| dP \le \mathbb{E}(|X_n - X_m|)$$
$$\le \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|X_m|) \le \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{für } n \ge m := N_0(\epsilon) \gg 1$$

$$\int_{|X_n|>K} |X_m| dP \le \int_{|X_n|>K, |X_m|\le L} |X_m| dP + \int_{|X_m|>L} |X_m| dP$$

$$\int_{|X_m|>L} |X_m| dP \le \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{für } L := L_0(\epsilon, m).$$

$$\int_{|X_n|>K, |X_m|\le L} |X_m| dP \le L\, P(|X_n| > K)$$
$$\le L \tfrac{1}{K} \sup_n \mathbb{E}|X_n| \le \tfrac{\epsilon}{3}$$
$$\text{für } K \ge K_0(L, \epsilon), n \ge N_0.$$

Bew.: (“$\Leftarrow$”) *Übungsaufgabe.*

1.5 Verteilung von Zufallsvariablen

Bildmaß

Satz 1.24 *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum, $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ messbar. Dann induziert X ein W-Maß P_X auf $(S, \mathcal{S})$ gemäß*

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)) \quad A \in \mathcal{S}.$$

Definition 1.30 *P_X heißt* **Bildmaß** bzw. **Verteilung von (P unter) X**.

Bemerkung *Andere Schreibweisen $P_X = P \circ X^{-1} = X_* P$.*

Fall $S = \mathbb{R}$ $t \mapsto F_X(t) = P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t)$ *heißt* **Verteilungsfunktion von X**.

Bsp. 1.16 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda))$, $X : \omega \to \mathbb{R}, X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P_X(]-\infty, t]) = P(X \leq t) \\ &= \lambda(\{\omega \in [0,1] \,|\, \frac{1}{\sqrt{\omega}} \leq t\}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & f.\ t < 1 \\ \lambda(\{\omega \in [0,1] \,|\omega \geq \frac{1}{t^2}\}) & f.\ t \geq 1 \end{array} \right\} = (1 - \frac{1}{t^2})_+. \end{aligned}$$

Definition 1.31 *Sei μ ein W-Maß auf $(E, \mathcal{E})$, dann heißt eine ZV $X : \Omega \to E$ μ-***verteilt***, falls $P_X = \mu$. Schreibweise $X \sim \mu$.*

Integration bzgl. dem Bildmaß (Integral-Transformationssatz)

Satz 1.25 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ messbar. Sei $f : (S, \mathcal{S}) \mapsto (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar, dann gilt*

$$\mathbb{E}_P(f(X)) = \int_S f(s) P_X(ds).$$

Bew: *Aussage gilt nach Def. von P_X, falls $f = \mathbb{1}_A$ für $A \in \mathcal{S}$, und somit auch falls f einfach. Durch monotone Approximation $f_n \nearrow f$ mit einfachen Funktionen folgt die Behauptung.* $\square$

Bemerkung *Analog für beliebige P_X-integrierbare Abbildungen $f : S \mapsto \mathbb{R}$*

Bsp. 1.17 *Für eine ZV X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Verteilung $\mu = P_X$ auf $\mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{E}_P(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, \mu(dx).$$

Varianz

Definition 1.32 *Die* **Varianz** *einer Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$V(X) := \mathbb{E}\left[(X - E(X))^2\right] \in [0, \infty]$$

Satz 1.26 *Falls $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$*

Bew: $E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2X\, E(X) + (E(X))^2] =$
$E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Lemma 1.3 (Tschebyshev Ungl.) *Sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dann gilt für $\delta > 0$*

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \tfrac{1}{\delta^2} V(X).$$

Bew: *Markov-Ungleichung für $|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0$ und $\varphi(x) = x^2$.*

Korollar 1.3 $X = E(X)$ *P-fast sicher* $\Leftrightarrow$ $V(X) = 0$.

Bew: *"$\Leftarrow$": $\{X \neq E(X)\} = \bigcup_n \{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\}$, mit*
$P(\{|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ nach Tschebyshev. "$\Rightarrow$" klar.

Beispiele[8]

- Gleichverteilung auf $[0,1]$: Erwartungswert $\frac{1}{2}$, Varianz $\frac{1}{12}$.
- Binomialverteilung auf $[0,1]$: Erwartungswert np, Varianz $np(1-p)$
- Poissonverteilung zum Parameter $\lambda > 0$: Erwartungswert λ, Varianz λ.
- Normalverteilung zu den Parametern $m \in \mathbb{R}, v > 0$: Erwartungswert m, Varianz V.
- Cauchy-Verteilung zum Parameter $\alpha > 0$ auf $\mathbb{R}$:
  $$\mu_\alpha(dx) = \frac{\alpha}{\pi}(\alpha^2 + x^2)\lambda(dx).$$
  Erwartungswert α, Varianz ∞.

[8] Rechnung an der Tafel, bzw. [Bauer] etc.

Gemeinsame Verteilung

Definition 1.33 *Es seien $X_1, \dots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dann heißt mit $\vec{X} = (X^1, \dots, X^d) \in \mathbb{R}^d$*

$$P_{\vec{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto [0,1], \quad P_{\vec{X}}(A) := P(\vec{X}^{-1}(A))$$

die **gemeinsame Verteilung von** $(X_1, \dots, X_n)$.

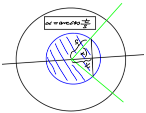
Satz 1.27 *$P_{\vec{X}}$ ist eindeutig bestimmt durch*

$$F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \to [0,1],\ F_{\vec{X}}(t_1, \cdots, t_n) := P(X_1 \le t_1, \cdots, X_d \le t_d).$$

Bew: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{E})$ *mit* $\mathcal{E} \mathrel{\hat{=}}$ *Ring der endlichen Vereinigungen von Mengen der Form* $]s_1, t_1] \times \cdots \times]s_d, t_d]$ *(vergl. Stieltjes-Maß).*

Bsp. 1.18 $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (B_1 \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{B}(B_1), \frac{1}{\pi}\lambda^2(dx))$

(Gleichverteilung auf dem Einheitsball $B_1 \subset \mathbb{R}^2$



$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad X(\omega) := \omega_x \quad$ *(x-Koordinate)*

$\quad Y(\omega) := \|\omega\| \quad$ *(Abstand zum Urspung)*

Dann gilt für $\vec{X} = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, mit $\alpha(t,s) = \arccos(\frac{t}{s})$

$$P_{\vec{X}}(]-\infty, t] \times]-\infty, s]) = \begin{cases} 0 & f.\ t < \min(-1, -s) \\ \frac{\pi(1-2\alpha)s^2 + s\sin\alpha}{\pi} & f.\ s \in [0,1], |t| \le s \\ \min(s^2, 1) & f.\ t > s. \end{cases}$$

Kovarianz

Definition 1.34 *Die* **Kovarianz** *von zwei ZV'en X und Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$Kov(X,Y) := \mathbb{E}[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Bemerkung

- $Kov(X,X) = V(X)$
- $Kov(X,Y) = Kov(X + c_1, Y + c_2) = \mathbb{E}(\bar{X}, \bar{Y})$

  mit $\bar{X} := X - E(X), \; \bar{Y} := Y - E(Y)$
- $Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

  $= \iint_{\mathbb{R}^2} xy\mu_{(X,Y)}(dxdy) - \int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx) \int_{\mathbb{R}} y\mu_Y(dy)$

  mit

  $\mu_{(X,Y)}$ – *Gemeinsame Verteilung von* (X,Y)

  $\mu_X, \, \mu_y$ – *('Rand'-)Verteilung von X bzw. von Y*

Bsp. 1.19 *Für $X = \vec{X} \in \mathbb{R}^d$ mit $\vec{X} \sim \nu_{m,C}$ (Gauss-Verteilung in $\mathbb{R}^d$)*

$$Kov(X_i, X_j) = C_{ij}.$$

Bew: $C \in \mathbb{R}^{d \times d}_{symm,>0} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}^{d \times d} : C = S\, S^t.$

$\overset{\text{Transformationssatz}}{\Longrightarrow}$ *Behauptung durch Integration nach* $y := S^{-1}x.$

Gleichheit von Bienamé

Definition 1.35 *Zwei ZV'en X, Y heißen* **unkorrelliert**, *falls $Kov(X, Y) = 0$.*

Bsp. 1.20 *Falls $X \hat{=} x-$ Koordinate und $Y \hat{=}$ Radius einer B_1-gleichverteilten ZV $\vec{X} \in B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (vergl. Beispiel 1.18), so ist $Kov(X, Y) = 0$.*

Definition 1.36 **Korrelation zweier Zufallsvariablen**

$$\rho(X, Y) := \frac{Kov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(X)}}$$

Bemerkung *Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\Rightarrow \rho(X, Y) \in [-1, 1]$*

Lemma 1.4 (Bienamé) *Für $X_1, \cdots, X_n$ paarweise unkorrelliert (d.h. $Kov(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$)*

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Bew: *O.b.d.A. $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

$V(\sum X_i) = \mathbb{E}[(\sum_i X_i)^2)] = \mathbb{E}[(\sum_i X_i)(\sum_j X_j)] = \mathbb{E}[\sum_{i,j} X_i X_j]$
$= \sum_{i,j} \mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{i,j} \delta_{ij} E(X_i X_j) = \sum_i V(X_i)$.

Kapitel 2:

Gesetze der Großen Zahlen und Unabhängigkeit

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz 2.1 *Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von paarweise unkorrellierten indentisch verteilten reellen ZV'en mit $X_1 \in L^2$, dann gilt für $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{stochastisch}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1).$$

Bew: *O.b.d.A $E(X_1) = 0$.*
Tschebyshev für $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und Bienamé:

$$\begin{aligned} P(|\frac{1}{n}S_n| > \delta) &= P(|S_n| > n\delta) \leq \frac{1}{n^2\delta^2}V(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_i V(X_i) = \frac{1}{n\delta^2}\mathbb{E}(X_1^2) \to 0. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung *Es folgt i.A. nicht, dass $\frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}(X_1)$ fast sicher. Insbesondere gilt i.A. nicht , dass die Approximation $\frac{1}{n}S_n(\omega)$ von $E(X_1)$ für $n \to \infty$ immer besser wird.*

2.1 Unabhängigkeit

Unabhängige Ereignisse

Definition 2.1

- *Eine Familie von Ereignissen* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *im W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt* **unabhängig**, *falls für jede endliche Teilmenge* $\Lambda' \subset \Lambda$ *gilt*
$$P(\cap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda'} P(A_\lambda).$$
- *Die Ereignisse Eine Familie von Ereignissen* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *heißen paarweise* **paarweise unabhängig**, *falls*
$$P(A_\lambda \cap A_{\lambda'}) = P(A_\lambda) \cdot P(A_{\lambda'}) \forall \lambda \neq \lambda'.$$

Bsp. 2.1 *Von den vier Ziffernfolgen* 112, 121, 211, 222 *wird eine zufällig ausgewählt. Dann sind die Ereignisse* $A_i :=$ *"i-te Stelle ist 1",* $i = 1, 2, 3$ *paarweise unabhängig aber nicht unabhängig.*

Bemerkung $A_1, \ldots, A_n$ *unabhängig* $\Leftrightarrow A_1^c, \ldots, A_n^c$ *unabhängig.*

Borel-Cantelli: Umkehrung

Satz 2.2 *Seien* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unabhängige Ereignisse in* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit* $\sum_n P(A_n) = \infty$, *dann gilt* $P(\limsup A_n) = 1$.

Bew: $B_n := \cup_{m\geq n} A_m \searrow \limsup A_n$. *Zeige* $P(B_n) = 1$.

$$
\begin{aligned}
P(B_n^c) = P(\cap_{m\geq n} A_m^c) &= \lim_{l\to\infty} P(\cap_{n\leq m\leq l} A_m^c) \\
&= \lim_l \prod_{n\leq m\leq l} P(A_m^c) = \lim_l \prod_{n\leq m\leq l} (1 - P(A_m)) \\
&= \lim_l \exp[\sum_{n\leq m\leq l} \log(1 - P(A_m))] \\
&\leq \lim_l \exp[-\sum_{n\leq m\leq l} P(A_m)] = 0,
\end{aligned}
$$

weil $\log(1-x) \leq -x$ *und* $\sum_{n\leq m\leq l} P(A_m) \to \infty$ *für* $l \to \infty$. $\square$

Bsp. 2.2 *Unendliche Wiederholung unabh. Münzwürfe mit* $p \in]0,1[$.

$$\Rightarrow P(\text{“unendlich häufig Kopf”}) = 1.$$

Korollar 2.1 (0-1-Gesetz von Borel) $P(\limsup A_n) \in \{0,1\}$ *für jede unabh. Folge* $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$.

Borel-Cantelli: Umkehrung (II)

Satz 2.3 (Chung) *Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarw. unabhängige Ereignisse in $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit $\sum_n P(A_n)=\infty$, dann gilt $P(\limsup A_n)=1$.*

Bew: *Zeige $P(S=\infty)=1$ mit $S=\lim_n S_n$, $S_n:=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$*

1) $\overset{\text{Monot. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(S_n)\to E(S)=\infty$.

2) $\overset{\text{Biename}}{\Longrightarrow} V(S_n)=\sum V(\mathbb{1}_{A_i})\le\sum_{i=1}^n E(\mathbb{1}_{A_i}^2)=E(S_n)$

$$\overset{\text{1) und 2)}}{\Longrightarrow} \frac{V(S_n)}{E^2(S_n)}\to 0.$$

$$\overset{\text{Tschebyshev}}{\Longrightarrow} P(S_n\ge\tfrac{1}{2}E(S_n))\ge P(|S_n-E(S_n)|\le\tfrac{1}{2}E(S_n))$$
$$\ge 1-4\frac{V(S_n)}{E^2(S_n)}\ge 1-\delta,\ \textit{falls}\ n\ge N_0(\delta).$$

$$\Rightarrow P(S\ge\tfrac{1}{2}E(S_n))\ge 1-\delta,\ \textit{falls}\ n\ge N_0(\delta).$$
$$\overset{E(S_n)\to\infty}{\Longrightarrow} P(S=\infty)\ge 1-\delta\ \forall\delta>0$$

□

Korollar 2.2 (0-1-Gesetz von Chung) $P(\limsup A_n)\in\{0,1\}$ *für jede paarw. unabh. Folge $\{A_n\}\subset\mathcal{F}$.*

Unabhängige Mengensysteme

Definition 2.2 *Eine Familie* $\{\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{F} \mid \lambda \in \Lambda\}$ *von Ereignismengen heißt unabhängig, falls jede endliche Teilauswahl von Mengen* $\{A_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, N, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j\}$ *unabhängig ist.*

Lemma 2.1 *Für eine unabh. Familie* $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *von* $\cap$*-stabilen Mengensystemen ist auch* $\{\sigma(\mathcal{E}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *unabhängig.*

Bew: $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *unabh.* $\Rightarrow$ *Zugeh. Dynkin-Systeme* $(\delta(\mathcal{E}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ *unabhängig. Wegen* $\cap$*-Stabilität von* $\mathcal{E}_\lambda$ *ist* $\delta(E_\lambda) = \sigma(E_\lambda) \, \forall \, \lambda$.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 2.3 *Eine Familie von $(E, \mathcal{E})$-wertigen Zufallsvariablen $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heißt* **unabhängig** *falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \Lambda$, $B_1, \ldots B_N \in \mathcal{E}$*

$$A_1 := \{X_{\lambda_1} \in B_1\}, \ldots, A_N := \{X_{\lambda_N} \in B_N\} \text{ unabhängig.}$$

Bemerkung

- $X_1, \cdots, X_n$ *unabhängig* $\Leftrightarrow \sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ *unabhängig.*
- $X_1, \cdots, X_n \Rightarrow \varphi_1(X_1), \ldots \varphi_n(X_n)$ *unabhängig,*
  falls $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ *messbar* $E \to E'$

Satz 2.4 *Für reelle ZV'en $X_1, \ldots, X_d$ sind äquivalent*

- $X_1, \ldots, X_d$ *unabhängig*
- $\forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ $F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_d) = \prod_{i=1\ldots d} F_{X_i}(t_i)$.
- $\mu_{\vec{X}} = \otimes_{i=1}^{d} \mu_{X_i}$ *(Produktmaß auf $\mathbb{R}^d$):*

d.h. $$\mu_{\vec{X}}(]a_1, b_1] \ldots]a_d, b_d]) = \bigotimes_{i=1}^{d} \mu_{X_i}(]a_i, b_i]).$$

Korollar 2.3 *Für $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig ist* $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

2.2 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Starkes Gesetz – Einfacher Fall

Satz 2.5 *Falls $(X_n)_n$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten ZV'en auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}(X_i^4) < \infty$, so gilt mit $m = E(X_1)$, dass*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \text{ fast sicher.}$$

Bew: *O.b.d.A* $m = 0$.

Mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *gilt*

$$E(S_n^4) = \sum_{i,j,k,l=1}^n E(X_i X_j X_k X_l)$$

$$= nE(X_1^4) + \binom{n}{2}\binom{4}{2}(E(X_1^2))^2 = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2 \le C\, n^2.$$

$$\overset{\text{Markov Ungl.}}{\Longrightarrow} P\left(\tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta\right) = P(|S_n| > n\delta) \le \frac{1}{n^4\delta^4} C\, n^2 = \frac{C}{\delta^4 n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_n P\left(\tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta\right) < \infty$$

$$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} P\left(\limsup_n \tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta\right) = 0.$$

$$\Rightarrow P\left(\limsup_n \tfrac{1}{n}|S_n| \ne 0\right) \le P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\limsup \tfrac{1}{n}|S_n| \ge \tfrac{1}{k}\}\right) = 0.$$

Satz von Etemadi (1981)

Satz 2.6 *Es sei $(X_n)_n$ eine Folge von ident. verteilten, paarweise unabh. ZV'en auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(|X_1|) < \infty$, so gilt mit $m = E(X_1)$, dass*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m \text{ fast sicher.}$$

Bew: *O.b.d.A. $X_i \geq 0$, andernfalls behandle X_+ und X_- separat.*

1. Schritt *Sei* $Y_i = X_i \mathbb{1}_{X_i \leq i}$, $\quad S_n^* = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \alpha > 1$ *und* $k_n := \lfloor \alpha^n \rfloor$.

$$\stackrel{\text{Tshebyschev}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} P\left(\frac{|S_{k_n}^* - ES_{k_n}^*|}{k_n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(S_{k_n}^*)}{k_n^2}$$

$$\stackrel{\text{Biename}}{=} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} V(Y_i) \leq \frac{2}{\epsilon^2} \sum_{n} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}(Y_i^2) = \frac{2}{\epsilon^2} \sum_{i,n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{k_n \geq i} \frac{1}{k_n^2} \mathbb{E}(Y_i^2)$$

$$= \frac{2}{\epsilon^2} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k_n \geq i} \frac{1}{k_n^2} \right) \mathbb{E}(Y_i^2) \leq \frac{2}{\epsilon^2} \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{9}{8 \ln \alpha} \frac{1}{i^2} \mathbb{E}(Y_i^2) =: c(\epsilon, \alpha) \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{E(Y_i^2)}{i^2}$$

$$= c \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i^2} \int_0^i x^2 dF(x) = c \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \int_k^{k+1} x^2 dF(x)$$

$$\leq c \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} x^2 dF(x) \leq c \sum_{k} \int_k^{k+1} x dF(x) = c\mathbb{E}(X_1) < \infty.$$

$$\stackrel{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \frac{1}{k_n}(S_{k_n}^* - E(S_{k_n}^*)) \to 0 \text{ fast sicher.}$$

Bew. (Forts.)

2. Schritt

- $E(X_1) = \lim_n E(Y_n) \Rightarrow \lim_n \frac{1}{n} E(S_n^*) = \mathbb{E}(X_1)$
$$\Rightarrow \frac{S_{k_n}^*}{k_n} \to E(X_1) \text{ fast sicher.}$$
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(X_n \neq Y_n) = \sum\limits_n P(X > n) = \sum\limits_n \int_n^\infty dF(x)$
$$= \sum_n \sum_{i\geq n} \int_i^{i+1} dF(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} i \int_i^{i+1} dF(x) \leq E(X_1) < \infty$$
$$\Rightarrow X_n \neq Y_n \text{ nur für endlich viele } n \text{ fast sicher.}$$
$$\Rightarrow \frac{S_{k_n}}{k_n} \to E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

3. Schritt

Wegen $X_i \geq 0$ ist S_n monoton.
$\Rightarrow$ Für eine beliebige Teilfolge $m \to \infty$ gilt
$$\frac{S_{n_{k_m}}}{m} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{n_{k_m+1}}}{m}, \text{ falls } k_m \text{ so gewählt, dass } m \in [n_{k_m}, n_{k_m+1}[$$
$$\Rightarrow \frac{n_{k_m}}{m} \geq \frac{1}{\alpha} \text{ und } \frac{n_{k_m+1}}{m} \leq \alpha$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X_1) \leq \liminf \frac{1}{n} S_n \leq \limsup \frac{1}{n} S_n \leq \alpha\mathbb{E}(X_1) \text{ fast sicher}$$
Wegen $\alpha > 1$ beliebig folgt die Behauptung. $\square$

Satz von Etemadi: Umkehrung

Satz 2.7 *Falls (X_n) Folge von paarw. unabh. ident. verteilten ZV'en, so dass $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i =: Y$ ex. fast sicher, so ist $X_1 \in L^1(\Omega)$ und*

$$Y \equiv E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

Lemma 2.2 *Für eine ZV $Z \geq 0$ gilt $E(Z^p) = p\int_0^\infty t^{p-1}P(Z \geq t)dt$.*

Bew:

$$E(Z^p) = E\left(p\int_0^Z t^{p-1}dt\right) = p\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}\mathbb{1}_{t\leq Z}\,dt\,P(d\omega)$$

$$= p\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}\int_\Omega \mathbb{1}_{t\leq Z}P(d\omega)dt = p\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}P(Z \geq t)dt$$

Bew: (Satz 2.7)

$\frac{1}{n}S_n \to Y$. *f.s.* $\Rightarrow \frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}S_{n-1} \to 0$ *f.s.*

$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$ *mit* $A_n = \{|X_n| \geq n\}$

$$\overset{\text{Chung-}0/1}{\Longrightarrow} \sum_n P(A_n) < \infty.$$

$$P(A_n) = P(|X_1| \geq n)$$

$$\overset{\text{Lemma 2.2}}{\Longrightarrow} E(|X_1|) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} P(|X_1| \geq n) < \infty.$$

$$\overset{\text{Etemadi}}{\Longrightarrow} Y = \lim \frac{1}{n}S_n = E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

□

2.3 Satz von Sanov (Große Abweichungen)

Entropie

Definition 2.4 *Sei $(S, \mathcal{S})$ ein messb. Raum.*

- $\mathcal{P}(S) := \{\mu \mid \mu$ *ist W-Maß auf* $(S, \mathcal{S})\}$
- *Für* $\mu \in \mathcal{P}(S)$ *heißt* $Ent_\mu : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$Ent_\mu(\nu) := \begin{cases} \int\limits_S \ln(\varphi(x))\,\nu(dx) & \text{falls } \nu(dx) = \varphi(x)\mu(dx) \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

relative Entropie (von ν) bzgl. μ.

Bemerkung $\Leftrightarrow Ent_\mu(\nu) = \int_S \ln(\varphi(x))\varphi(x)\,\mu(dx)$ *falls* $\nu(dx) = \varphi(x)\mu(dx)$.

Lemma 2.3 *i)* $Ent_\mu(\nu) \geq 0$ *mit* $Ent_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$.
ii) $Ent_\mu(t\nu_1 + (1-t)\nu_2) \leq tEnt_\mu(\nu_1) + (1-t)Ent_\mu(\nu_2)$

Bew: $Ent_\mu(\nu) = \int_S \eta(\varphi(x))\,\mu(dx)$ *mit* $s \to \eta(s) := s\ln(s)$ *konvex*

$\overset{Jensen}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = \int_S \eta(\varphi(x))\mu(dx) \geq \eta(\int_S \varphi(x)\mu(dx)) = \eta(1) = 0.$

$\overset{Jensen^{*9}}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \int_S \varphi(x)\mu(dx)\ \mu\text{-f.s} \Leftrightarrow \nu = \mu \rightsquigarrow i).$

$\overset{\eta\ konvex}{\Longrightarrow} \eta(t\varphi_1(x) + (1-t)\varphi_2(x)) \leq t\eta(\varphi_1(x)) + (1-t)\eta(\varphi_2(x)) \rightsquigarrow ii).$

[9] Jensen*: Für $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist $E_P(\eta(X)) \geq \eta(E_P(X))$ mit "=" genau dann, wenn $X = E_P(X)$ P-fast sicher.

Satz von Sanov (1957)

Definition 2.5 *Für $(S, \mathcal{S})$ messb. Raum und $(X_1, \dots, X_n) =: X^{(n)} \in S^n$ heißt*

$$\mu_{X^{(n)}} = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \in \mathcal{P}(S)$$

empirische Verteilung von $(X) = (X_1, \dots, X_n)$.

Bemerkung *Falls S endliche Menge $\rightsquigarrow \mathcal{P}(S)$ Standard-Simplex in $\mathbb{R}^{|S|}$*

$\mathcal{P}(S) \hat{=} \{(\mu_1, \dots, \mu_{|S|}) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid \sum_{s \in S} \mu(s) = 1\} = \Delta_{n-1} \subset \mathbb{R}^{|S|}$

$$|\mu - \nu|_{\mathcal{P}(S)} := |\mu - \nu|_{\mathbb{R}^{|S|}}$$

Satz 2.8 (Sanov) *Sei S endliche Menge, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ und (X_n) eine Folge unabh. μ-verteilter ZV'en. Dann gilt für offenes $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$*

$$\tfrac{1}{n} \cdot \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in \mathcal{A}) \longrightarrow - \inf_{\nu \in \mathcal{A}} Ent_{\mu}(\nu).$$

Bemerkung $\rightsquigarrow$ *Exponentielle Konvergenz der empirischen Verteilungen:*

$$P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) \simeq \exp(-n\, Ent_{\mu}(\nu))$$

Lemma 2.4 *Für* $\nu \in \mathcal{P}_n := \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid n \cdot \mu(s) \in \mathbb{N} \; \forall s \in S\}$ *gilt*

$$\left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{|S|} e^{-n Ent_\mu(\nu)} \le P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) \le e^{-n Ent_\mu(\nu)}.$$

Bemerkung $|\mathcal{P}_n| \le (n+1) \times (n+1) \times \cdots \times (n+1) \overset{(|S|\text{-Mal})}{=} (n+1)^{|S|}$.

Bew: (Lemma 2.4) $\xi_n := (n\mu_{X^{(n)}}(s))_{s \in S} \in \mathbb{R}^{|S|}$ *ist* (n,μ)*-multinomialverteilt*

$$\pi_n(\nu|\mu) := P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) = \kappa_n(\nu) \cdot \prod_{s \in S} (\mu(s))^{n\nu(s)}$$

mit

$$\kappa_n(\nu) := |\{x^{(n)} \in S^n \mid \mu_{x^{(n)}} = \nu\}| = \frac{n!}{(n\nu(s_1))! \ldots (n\nu(s_{|S|}))!}$$

$$\prod_{s \in S} (\mu(s))^{n\nu(s)} = exp\Big[n \sum_{s \in S} \nu(s) \ln(\mu(s))\Big] =: e^{n\, H(\nu|\mu)}$$

- $\Rightarrow \kappa_n(\nu) e^{nH(\nu|\nu)} = \pi_n(\nu|\nu) \le 1$
  $$\Rightarrow \kappa_n(\nu) \le e^{-nH(\nu|\nu)}$$
- $\overset{\text{Multinomialverteilung}}{\Longrightarrow} \pi_n(\tilde{\nu}|\nu) \le \pi_n(\nu|\nu) \; \forall \nu, \tilde{\nu} \in \mathcal{P}_n$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{\tilde{\nu} \in \mathcal{P}_n} \pi_n(\tilde{\nu}|\nu) \le |\mathcal{P}_n| \pi_n(\nu|\nu) \le (n+1)^{|S|} \pi_n(\nu|\nu).$$

$$\Rightarrow \kappa_n(\nu) = e^{-nH(\nu|\nu)} \pi_n(\nu|\nu) \ge e^{-nH(\nu|\nu)} \cdot (n+1)^{-|S|}$$

$\Rightarrow$ *Behauptung, da* $H(\nu|\nu) - H(\nu|\mu) = Ent_\mu(\nu)$. □

Bew: (Satz 2.8) $A \subset \mathcal{P}(S)$

- $P(\mu_{X^{(n)}} \in A) = \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} \pi_n(\nu|\mu) \overset{\text{Lemma 2.4}}{\leq} \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} e^{-nEnt_\mu(\nu)}$

$\leq |A \cap \mathcal{P}_n| \exp\big(-n \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\leq (n+1)^{|S|} \exp\big(-n \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\overset{\lim_{n\to\infty} \frac{|S|}{n} \ln(n+1) = 0}{\Longrightarrow} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \leq -\inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)$

- $P(\mu_{X^{(n)}} \in A) = \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} \pi_n(\nu|\mu)$

$\overset{\text{Lemma 2.4}}{\geq} (n+1)^{-|S|} \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} e^{-nEnt_\mu(\nu)}$

$\geq (n+1)^{-|S|} \exp\big(-n \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \geq -\limsup_{n\to\infty} \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu)$

- $Ent_\mu : A \cap \{Ent_\mu(.) < \infty\} \to \mathbb{R}$ *stetig,* $A \subset \mathcal{P}(S)$ *offen*

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu) = \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu) \qquad \square$

Korollar 2.4
$$\begin{cases} \liminf \frac{1}{n} \log P(\mu_{X^{(n)}} \in O) \geq -\inf_O Ent_\mu & \text{für } O \subset \mathcal{P}(S) \text{ offen} \\ \limsup \frac{1}{n} \log P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \leq -\inf_A Ent_\mu & \text{für } A \subset \mathcal{P}(S) \text{ abg.} \end{cases}$$

Bemerkung *Kor. 2.4* $\leftrightarrow$ **'Prinzip der großen Abweichungen'** *für* $(\mu_{X^{(n)}})_n$

Satz von Cramér

Definition 2.6 *Sei $X \simeq \nu$ eine reelle ZV mit Verteilung μ.*

- $\lambda : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $\lambda_\mu(t) := E(e^{tX}) = \int_\mathbb{R} e^{tx} \mu(dx)$ *heißt* **Laplace-Transformierte von X (bzw. von μ)**.
- $I_\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $I_\mu(x) := \sup\limits_{t \in \mathbb{R}}(tx - \log \lambda_\mu(t))$ *heißt* **Cramér-Transformierte von μ.**

Satz 2.9 (Cramér 1938) *Sei (X_n) Folge unabh. ident. verteilter ZV'en mit $X_1 \simeq \mu$, dann gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $x > E(X_1)$*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\left(\frac{1}{n} S_n \geq x\right) = -I_\mu(x).$$

Bemerkung

- *Tausch X gegen $-X \rightsquigarrow$ Analog für $P(\frac{1}{n} S_n \leq x)$ f. $x < E(X_1)$.*
- $t \to \Lambda_\mu(t) := \log \lambda_\mu(t)$ **'Log-Laplace-Transformierte'**. $I_\mu(x) = \sup_t(tx - \Lambda(t))$ **'Legendre-Transformierte'** *von Λ.*

Entropieungleichung

Satz 2.10 *Für $\mu, \nu \in P(S)$*

$$Ent_\mu(\nu) = \sup_{\psi : S \to \mathbb{R} \text{ messb.}} E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi).$$

Bew: *Schreibweise* $E_\mu(\psi) := \langle \psi, \mu \rangle$

- *Falls* $\nu = \varphi\mu$:

$$\langle \psi, \nu \rangle - Ent_\mu(\nu) = \langle \psi - \log \varphi, \nu \rangle = \langle \log(\tfrac{e^\psi}{\varphi}), \nu \rangle$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\Longrightarrow} \leq \log \langle \tfrac{e^\psi}{\varphi}, \nu \rangle = \log \langle e^\psi, \mu \rangle.$$

$$\Rightarrow Ent_\mu(\nu) \geq E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi) \quad \forall \psi.$$

Außerdem gilt "$=$" *falls* $\psi := \log \varphi$.

- *Falls nicht* $\nu = \varphi\mu$ *für ein gewisses* φ

$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{S}$, *s.d.* $\nu(A) > 0$ *und* $\mu(A) = 0$.

$\Rightarrow$ *mit* $\psi = t\mathbb{1}_A$ *gilt*

$$E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi) = t\nu(A) - \log E_\mu(1) = t\nu(A) \overset{t\to\infty}{\to} \infty.$$

Lemma 2.5 *Für* $U_z = \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid E_\mu(x) > z\}$ *ist* $I_\mu(z) = \inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu)$.

Bew: *Schreibweise* $E_\mu(X) = \langle x, \mu \rangle$ *bzw.* $E_\mu(e^{tX}) = \langle e^{tx}, \mu \rangle$.

- *Sei* $\nu \in U_z \overset{\text{Entropieungleichung}}{\Longrightarrow}$
$Ent_\mu(\nu) \geq \langle t \cdot x, \nu \rangle - \log \langle e^{tx}, \mu \rangle \geq tz - \log \langle e^{tx}, \mu \rangle$

$$\overset{\text{Def. von } I_\mu}{\Longrightarrow} \inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu) \geq I_\mu(z)$$

- *Umgekehrt gilt für* $t^* = argmax_t\, \rho_z(t) := (tz - \log \langle e^{tx}, \mu \rangle)$

$$\rho_z'(t^*) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\langle e^{t^* x}, \mu \rangle} \langle x e^{t^* x}, \mu \rangle$$

$$\Rightarrow \nu(dx) := \frac{1}{\langle e^{t^* x}, \mu \rangle} e^{t^* x} \mu(dx) \text{ neues W-Maß,}$$

$$\nu \in \overline{U_z}$$

$$\overset{\text{Einsetzen}}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = \rho_z(t^*) = I_\mu(z).$$

Bew: (Satz 2.9) *Im Spezialfall, dass $\mu(S) = 1$ mit $S \subset \mathbb{R}$ endlich:*

- $\mu_{X^{(n)}} \in \mathcal{P}_n(S) \subset \mathcal{P}(S)$.
- $\mathcal{P}(S) \mapsto \mathbb{R}$, $\mu \mapsto E_\mu(X) = \sum_{s \in S} s\mu(s)$ *ist stetig.*

$$\Rightarrow U_z = \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid E_\mu(X) > z\} \subset \mathcal{P}(S) \text{ offen}$$

- $E_{\mu_{X^{(n)}}}(x) = \frac{1}{n} S_n$ *und* $\frac{1}{n} S_n > z \Leftrightarrow \mu_{X^{(n)}} \in U_z$

$\overset{Sanov}{\Longrightarrow} \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z) = -\inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu) \overset{Lemma\ 2.5}{=} -I_\mu(z)$.

- $\forall\, z < x < z'$:

$$I_\mu(z') = \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z') \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log P(S_n \geq x)$$
$$\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log P(S_n \geq x) \leq \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z) = I_\mu(z)$$

$\Rightarrow$ *Beh. folgt aus Lemma 2.5, da* $z \to I_\mu(z)$ *stetig.*

Nachtrag: W-Maße auf $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Bezeichnungen

$\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_i)_{\in\mathbb{N}} \,|\, \omega_i \in \mathbb{R}\}$
$pr_n : \Omega \to \mathbb{R}^n, pr_n(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$
$pr_n^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (\omega_1, \ldots, \omega_m) \to (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ für $m \geq n$.
$\mathcal{Z} = \{Z \subset \Omega \,|\, Z = pr_n^{-1}(B), n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$,
$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z}) \subset 2^{\Omega}$.

Definition 2.7 *Eine Folge von W-Maßen auf μ_n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, heißt* **konsistent**, *falls $(pr_n^m)_*\mu_m = \mu_n$ für alle $m \geq n$.*

Bsp. 2.3 $\mu_n(dx_1 \ldots, dx_n) := \otimes_{i=1}^n \mu(dx_i)$ *(n-faches Produktmaß).*

Satz 2.11 (Kolmog. Konsistenzsatz) *Eine Familie $(\mu_n)_n$ von W-Maßen ist konsistent genau dann wenn ein (eindeutiges) W-Maß μ_∞ auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ ex., so dass*

$$\mu_n = (pr_n)_*\mu_\infty \,\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Korollar 2.5 *Für ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ex. genau ein W-Maß μ_∞ auf $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathcal{Z}))$ so dass $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_n(\omega) = \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine unabh. Folge von μ-verteilten ZV'en definiert.*

Beweis von Satz 2.11

Lemma 2.6 *Sei η ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, so ex. zu $\epsilon > 0$ ein $K_\epsilon \subset A$ kompakt, s.d. $\eta(A \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.*

Bew: *Mengen A mit dieser Eigensch. bilden ein $\cap$-stabiles Dynkin-System, welches die Mengen $A = \bigtimes_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$ enthält.* $\square$

Bew: (Satz 2.11)

- *$\mathcal{Z}$ ist ein Ring. Definiere Inhalt auf $\mathcal{Z}$: $\mu_0(Z) := \mu_n(B)$ falls $Z = pr_n^{-1}(B) \in \mathcal{Z}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\overset{\text{Konsistenz}}{\Longrightarrow}$ μ_0 wohldefiniert.*

- *Zeige: μ_0 Prämaß auf $\mathcal{Z}$: $Z_n = pr_n^{-1}(B_n) \searrow \emptyset \overset{!}{\Rightarrow} \mu_0(Z_n) \searrow 0$.*

Angen. $\exists\, \delta > 0$: $\mu_0(Z_n) \geq \delta > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Sei $K_n \subset B_n$ kp. mit $\mu_n(B_n \setminus K_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$ und $C_n := pr_n^{-1} K_n \in \mathcal{Z}$.
Sei $D_n = \cap_{i=1}^n C_i \Rightarrow D_n = pr_n^{-1} F_n$ für $F_n \subset K_n$ abgeschlossen.

$$\mu_0(D_n) \geq \delta - \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^{i+1}} \geq \frac{\delta}{2} \Rightarrow F_n \neq \emptyset.$$

Wähle $\omega^{(n)} \in D_n \,\forall n \in \mathbb{N}$. $\overset{\text{Diagonalfolge}}{\Longrightarrow} \exists\, (\omega^{(n')})_{n'}$, $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots) \in \Omega$

$$\text{s.d. } (\omega_1^{(n')}, \dots, \omega_m^{(n')}) \overset{n' \to \infty}{\longrightarrow} (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m) \,\forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\overset{F_m \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m) \in F_m \forall m \Rightarrow \bar{\omega} \in D_m \,\forall m \Rightarrow \cap_m D_m \neq \emptyset.$$

Wegen $D_n \subset Z_n$ mit $Z_n \searrow \emptyset \Rightarrow D_n \searrow \emptyset \rightsquigarrow$ Widerspruch. $\square$

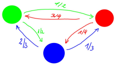
2.4 Reihen unabhängiger Zufallsvariablen

Terminale σ-Algebra

Definition 2.8 *Für eine Folge von σ-Algebren $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$ ist die* **terminale σ-Algebra** *gegeben durch*

$$\mathcal{T} = \cap_n \sigma(\cup_{m \geq n} \mathcal{F}_m).$$

Bsp. 2.4 $\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,
$E = \{R, G, B\}$, $\mathcal{E} = 2^E$,



$$X_n : \Omega \mapsto E, \quad X_n((\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \omega_n, \ \mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$$

$\Rightarrow \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n(\omega)=G} = \infty\} \in \mathcal{T}$.

Bsp. 2.5 *Sei X_n eine Folge von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$, dann ist*

$$E := \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) \ \textit{konvergiert}\} \in \mathcal{T}.$$

Kolmogorov'sches 0-1-Gesetz

Satz 2.12 *Falls $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-unabh. σ-Algebren, so gilt $P(E) \in \{0,1\}$ für alle $E \in \mathcal{T}$.*

Bew: (Satz 2.12)

$$\Big(\mathcal{F}_n, \bigcup_{k\geq m} \mathcal{F}_k\Big) \text{ unabh. } \forall\, m > n \overset{\text{Lemma 2.1}}{\Longrightarrow} \Big(\mathcal{F}_n, \sigma\big(\bigcup_{k\geq m} \mathcal{F}_k\big)\Big) \text{ unabh.}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}_n, \mathcal{T}) \text{ unabh. } \forall\, n \Rightarrow \Big(\bigcup_{l\geq n} \mathcal{F}_l, \mathcal{T}\Big) \text{ unabh.} \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} (\mathcal{T}, \mathcal{T}) \text{ unabh.}$$

$$\Rightarrow E \text{ unabh. von } E \quad \forall\, E \in \mathcal{T}$$

d.h. $P(E) = P(E \cap E) = P(E)^2 \Rightarrow P(E) \in \{0,1\}$. $\square$

Korollar 2.6 *Für eine Folge (X_n) von unabh. ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$P(\{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ konvergiert}\}) \in \{0,1\}.$$

Definition 2.9 *Für eine Folge (X_n) heißt $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$* **konvergent**, *falls $P(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ konv. }) = 1$.*

Kolmogorov'sche Ungleichung

Lemma 2.7 *Für* $X_1, \cdots, X_n$ *unabh. mit* $E(X_i) = 0$ *und* $s_n^2 := \sum_{i=1}^n V(X_i)$

$$P(\max_{1 \le k \le n} |\sum_{i=1}^k X_i| \ge l) \le \frac{s_n^2}{l^2}.$$

Bemerkung *"Tschebyshev-Ungl. für Maximum"* $T_n := \max_{1 \le k \le n} |\sum_{i=1}^k X_i|$

Bew: $E_k := \{|S_1| < l, \ldots, |S_{k-1}| < l, |S_k| \ge l\} \Rightarrow \{T_n \ge l\} = \dot{\bigcup}_k E_k$

$$P(E_K) \le \frac{1}{l^2} E(S_k^2; E_k) \le \frac{1}{l^2} E(S_k^2 + (S_n - S_k)^2; E_k)$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit}}{=} \frac{1}{l^2} E(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2; E_k) = \frac{1}{l^2} E(S_n^2; E_k).$$

$$\Rightarrow P(T_n \ge l) = \sum_k P(E_k) \le \sum_k \frac{1}{l^2} E(S_n^2; E_k) = \frac{1}{l^2} E(S_n^2).$$

Kolmogorov'scher Reihensatz

Satz 2.13 *Für eine Folge unabh. ZV'en* $X_1, X_2, \ldots,$ *mit* $E(X_i) = 0$ *und* $\sum_i V(X_i) < \infty$ *konvergiert* $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i$ *fast sicher.*

Lemma 2.8 *Eine Folge von* (S_n) *von ZV'en konvergiert fast sicher genau dann, wenn* $P(\sup_{n \leq k \leq m} |S_k - S_n| > \delta) \to 0$ *für* $m \geq n \to \infty$.

Bew: *Siehe Übungen.*

Bew: (Satz 2.13)

$$\overset{\text{Kolmogorov Ungl.}}{\Longrightarrow} P(\sup_{n \leq k \leq m} |S_k - S_n| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{j=n+1}^{m} V(X) \overset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aussage folgt mit Lemma 2.8.

Kolmogorov'scher Reihensatz: Umkehrung

Satz 2.14 *Für (X_n) Folge unabh. ZV'en mit $E(X_n) = 0$ und $|X_n| \leq C$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus $\sum_n X_n$ konv., dass $\sum_n V(X_n) < \infty$.*

Bew: Sei $\sigma_n^2 := V(X_n)$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 := 0$

- Für $L > 0$ sei $F_n(L) := \{|S_1| \leq L, \ldots, |S_n| \leq L\}$.

$$\sum_n X_n \text{ ex. f.s. } \Rightarrow P(\bigcup_{L\in\mathbb{N}} \bigcap_n F_n(L)) = 1$$

$$\Rightarrow \exists\, L > 0 : P(F_n(L)) \geq \delta > 0 \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- $E(S_n^2; F_{n-1}) = E(S_{n-1}^2 + 2X_n S_{n-1} + X_n^2; F_{n-1})$
  $= E(S_{n-1}^2; F_{n-1}) + E(X_n^2) \cdot P(F_{n-1}) \geq E(S_{n-1}^2; F_{n-1}) + \sigma_n^2 \delta$

- $E(S_n^2, F_{n-1}) = E(S_n^2, F_n) + E(S_n^2, F_{n-1} \setminus F_n)$
  $\leq E(S_n^2, F_n) + (L + C)^2 P(F_n \setminus F_{n-1})$

$$\Rightarrow \delta \sigma_n^2 \leq E(S_n^2; F_n) - E(S_{n-1}^2, F_{n-1}) + (L + C)^2 P(F_{n-1} \setminus F_n)$$

(Teleskopsumme, $S_n^2 \leq L$ auf F_n)

$$\Rightarrow \delta \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 \leq L^2 + (L + C)^2$$

□

Kolmogorov'scher Drei-Reihen-Satz

Satz 2.15 *$\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist konvergent für (X_n) unabh. $\Leftrightarrow$ i) & ii) & iii)*
i) Für ein $C > 0$ ist $\sum_n P(|X_n| > C) < \infty$.
ii) Für $Y_n := X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq C}$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(Y_n)$
iii) Für Y_n wie in ii) ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} V(Y_n) < \infty$.

Bew.: "$\Leftarrow$": $\hat{Y}_n := Y_n - \mathbb{E}(Y_n) \overset{\text{K'scher Reihens.}}{\Longrightarrow} \sum \hat{Y}_n$ konvergiert f.s.

$\Rightarrow \sum Y_n = \sum(\hat{Y}_n + E(Y_n))$ konvergiert f.s.

$\sum P(X_n \neq Y_n) = \sum P(|X_n| > C) < \infty$

$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} X_n = Y_n$ für schließich alle $n \in \mathbb{N}$ f.s.

$\Rightarrow \sum X_n$ konvergiert f.s.

Beweis (Forts.)

"$\Rightarrow$": • $\sum X_n$ ex. $\Rightarrow |X_n| \leq C$ für schließich alle n mit W-keit 1.

$\overset{\text{Borel-0/1}}{\Longrightarrow} \sum P(|X_n| > C) < \infty \rightsquigarrow$ i)

• $\overset{\text{i) \& Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \sum Y_n$ konv.

Sei $Y_n' \sim Y_n$ eine unabh. Kopie von X_n, d.h.

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega = \{\bar{\omega} = (\omega', \omega) \,|\, \omega', \omega \in \Omega\}$$

$$\bar{P}(d(\omega', \omega)) = P(d\omega') \otimes P(d\omega)$$

$$\bar{Y}_n'(\bar{\omega}) := Y_n(\omega'), \; \bar{Y}_n(\bar{\omega}) := Y_n(\omega)$$

$\Rightarrow \{\bar{Y}_n, \bar{Y}_n', n \in \mathbb{N}\}$ unabh.

$\Rightarrow \bar{P}(\sum \bar{Y}_n'$ konv.$) = \bar{P}(\sum \bar{Y}_n$ konv.$) = P(\sum Y_n$ konv.$) = 1$.

$\Rightarrow \sum \bar{Z}_n$ konvergiert f.s. für $\bar{Z}_n := \bar{Y}_n - \bar{Y}_n'$

$E(\bar{Z}_n) = 0$ und $|\bar{Z}_n| \leq 2C$ f.s.

$\overset{\text{Satz 2.14}}{\Longrightarrow} \sum V(\bar{Z}_n) = 2 \sum V(Y_n) < \infty \rightsquigarrow iii)$

• $\overset{\text{iii) \& K'scher Reihens.}}{\Longrightarrow} \sum \hat{Y}_n$ konv. mit $\hat{Y}_n = Y_n - E(Y_n)$

$\Rightarrow \sum E(Y_n) = \sum (Y_n - \hat{Y}_n)$ konv. $\rightsquigarrow$ ii)

Levy'sche Ungleichung

Lemma 2.9 *Falls $X_1, \ldots, X_n$ unabh. ZV mit $P(|\sum_{k=i}^n X_i| \geq \frac{l}{2}) \leq \delta$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so folgt*

$$P(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^k X_i| \geq l) \leq \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Bew:

- *Sei* $E_k := \{|S_1| < l, \ldots, |S_{k-1}| < l, |S_k| \geq l\}$
  $\Rightarrow$ *Mit* $T_n := \max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^k X_i|$ *folgt* $\{T_n \geq l\} = \dot{\bigcup}_k E_k$

- $P(T_n \geq l, |S_n| \leq \frac{l}{2}) = \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n| \leq \frac{l}{2}\})$
  $\leq \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n - S_k| \geq \frac{l}{2}\}) = \sum_{k=1}^n P(E_k) P(\{|S_n - S_k| \geq \frac{l}{2}\})$
  $\leq \delta P(T_n \geq l)$

- *Wegen* $P(T_n \geq l, |S_n| > \frac{l}{2}) \leq P(|S_n| > \frac{l}{2}) \leq \delta$
  $P(T_n \geq l) \leq \delta P(T_n \geq l) + \delta \Rightarrow$ *Behauptung.* $\square$

Satz von Levy

Satz 2.16 *Für* $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ *mit* (X_n) *unabh. gilt*

S_n *konvergiert fast sicher* $\Leftrightarrow$ S_n *konvergiert stochastisch.*

Bew: *"$\Rightarrow$" klar.*

"$\Leftarrow$": S_n konvergiere stochastisch

$$\Rightarrow P(|S_n - S_m| > \delta) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon, \delta > 0 \quad \exists\, N_0 : \ P(|\textstyle\sum_{i=k+1}^m X_i| > \delta) \leq \epsilon \quad \forall m \geq k \geq N_0.$$

$$\overset{\text{Levy-Ungleichung}}{\Longrightarrow} \forall \epsilon, \delta > 0 \quad \exists N_0 : \forall m > k \geq N_0$$

$$P(\max_{l \in k, \ldots, m} |S_l - S_m| > 2\delta)$$

$$= P(\max_{l \in k, \ldots, m} |\textstyle\sum_{i=l+1}^m X_i| > 2\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$$

Aussage folgt mit Lemma 2.8. $\square$

Kapitel 3:

Zentraler Grenzwertsatz

Schwache Konvergenz

Definition 3.1 *Sei (S, τ) topologischer Raum, Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{S} = \sigma(\tau)$.*

- *Eine Folge von W-Maßen auf $(S, \mathcal{S})$* **konvergiert schwach** *gegen das W-Maß μ, falls für alle $\varphi : S \to \mathbb{R}$ beschränkt stetig*
$$\int_S \varphi(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \int_S \varphi(x)\mu(dx)\ .$$
- *Eine Folge (X_n) von S-wertien ZV'en $X_n : \Omega_n \to S$* **konvergiert schwach** *gegen $X : \Omega \to S$, falls*
$$Vert_{X_n} \stackrel{schwach}{\longrightarrow} Vert_X .$$

Schreibweise $\mu_n \Rightarrow \mu$ bzw. $X_n \Rightarrow X$.

Bemerkung

- *"$\Rightarrow$" erzeugt die* **'schwache Topologie'** *auf $\mathcal{P}(S)$.*
- $(X_n \Rightarrow X) \iff E[\varphi(X_n)] \to E[\varphi(X)] \, \forall \, \varphi \in C_b(S)$.
- $(\delta_{s_n} \Rightarrow \delta_s) \iff s_n \to s$, *für $n \to \infty$.*

Zentraler Grenzwertsatz

Satz 3.1 (ZGS) *Für eine unabh. ident. vert. Folge $(X_n)_n$ von ZV'en mit $E(X_1) = m$ und $V(X_1) = \sigma^2$ gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dass*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \nu_{0,1}.$$

Bemerkung $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *beschreibt* **'Fluktuationen'** *beim GGZ* $\frac{1}{n} S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$.

Bew: (Stein, '72) • *O.B.d.A.* $m = 0$, $\sigma = 1$. *Zu zeigen:* $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$:

$E[f(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ *mit* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

$\rightsquigarrow$ *O.b.d.A.* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$.

• $h(x) := \frac{1}{\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} f(t)\varphi(t)dt = -\frac{1}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$.

$\Rightarrow h'(x) = f(x) - \frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} \int_{-\infty}^{x} f(t)\varphi(t)dt \overset{\varphi'(x) = -x\varphi(x)}{=} f(x) + xh(x)$.

• *Mit* $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ *und* $x > 0$

$|h(x)| \leq \frac{M}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} \varphi(t)dt \leq \frac{M}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)dt = \frac{M}{x}$

Analog $|h(x)| \leq \frac{M}{-x}$ *für* $x < 0 \rightsquigarrow |h(x)| \leq \frac{M}{|x|}$ *für* $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x \cdot h(x)| \leq M \Rightarrow h' \in C_b(\mathbb{R})$ *mit* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |h'(x)| \leq 2M$.

Beweis von ZGS (Forts.)

$$
\begin{aligned}
E[f(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] &= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - E[\frac{S_n}{\sqrt{n}} h(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{\tilde{S}_n + X_1}{\sqrt{n}})] \text{ mit } \tilde{S}_n := \textstyle\sum_{i=2}^n X_i \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}})] - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) ds] \\
&\overset{X_1 \text{ und } \tilde{S}_n \text{ unabh.}}{=} E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) ds] \\
&\overset{E(X_1^2) = 1}{=} E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) - h'(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}})] \\
&\qquad - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 \left(h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) - h'(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}) \right) ds] \\
&=: E(U_n) - E(V_n) \\
&= E(U_n; A_{n,k}) - E(V_n; A_{n,k}) \\
&\quad + E(U_n; A_{n,k}^c) - E(V_n; A_{n,k}^c) \text{ mit } A_{n,k} = \{|\tilde{S}_n/\sqrt{n}| \leq k\}.
\end{aligned}
$$

Beweis von ZGS (Forts.)

- $U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}}(\omega) = \left(h'\left(\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}} + \frac{X_1(\omega)}{\sqrt{n}}\right) - h'\left(\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right)\right) \mathbb{1}_{\left|\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right| \leq k}$

h' gleichm. stetig auf $[-k, k] \Rightarrow U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}} \to 0$ f.s. für $n \to \infty$.

Ferner $|U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}}| \leq |U_n| \leq 4M \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(U_n; A_{n,k}) \to 0$.

- Analog $V_n \mathbb{1}_{A_{n,k}} \to 0$ f.s.

$|V_n \mathbb{1}_{A_{n,k}}| \leq 4MX_1^2 \in L^1(P) \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(V_n; A_{n,k}) \to 0$.

- $|E(U_n \mathbb{1}_{A_{n,k}^c})| \leq 4MP(A_{n,k}^c) \overset{\text{Tscheb.}}{\leq} \frac{4M}{k^2} V\left(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{Biename}}{=} \frac{4M}{k^2}\frac{n-1}{n}$
- $|E(V_n \mathbb{1}_{A_{n,k}^c})| \leq 4MP(X_1^2 \mathbb{1}_{A_{n,k}^c}) \overset{\text{Unabh.}}{=} 4ME(X_1^2) \cdot P(A_{n,k}^c) \overset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{4M}{k^2}$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|E\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| \leq \frac{8M}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \text{ Beh.}$$

3.1 Schwache Konvergenz

Portmanteau Theorem

Satz 3.2 *Sei (S, τ) ein top. Raum mit $\mathcal{S} = \sigma(\tau)$. Dann sind. äquivalent*

1. $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. $\mu(A) \geq \limsup_n \mu_n(A) \, \forall A \subset S$ *abgeschlossen*
3. $\mu(O) \leq \liminf_n \mu_n(O) \, \forall O \subset S$ *offen*
4. $\mu(G) = \lim_n \mu_n(G) \, \forall G \in \mathcal{S}$ *mit* $\mu(\partial G) = 0$.

Lemma 3.1 *Für $A \subset S$ abg.* $\mu(A) = \inf\{\int_S \phi(x)\mu(dx) \,|\, \phi \in C_b(S), \phi \geq \mathbb{1}_A\}$.

Bew: (Satz 3.2) *Schreibweise* $\langle \varphi, \mu \rangle = \int_S \varphi(x)\mu(dx)$.

" i) $\Rightarrow$ ii)": *Sei* $\varphi \in C_b(S), \varphi \geq \mathbb{1}_A$. $\langle \varphi, \mu_n \rangle \geq \sup_{m \geq n} \langle \varphi, \mu_m \rangle \geq \sup_{m \geq n} \mu_m(A)$

$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \langle \varphi, \mu \rangle \geq \limsup_n \mu_n(A) \overset{\text{Lemma 3.1}}{\Longrightarrow} \mu(A) \geq \limsup_n \mu_n(A)$.

" ii) $\Rightarrow$ iii)": *Folgt durch Übergang zu Komplementmengen.*

" iii) $\Rightarrow$ iv)": $\mu(G) = \mu(\mathring{G}) \leq \liminf \mu_n(\mathring{G}) \leq \liminf \mu_n(G)$
$\leq \limsup \mu_n(G) \leq \limsup \mu_n(\bar{G}) \leq \mu(\bar{G}) = \mu(G)$.

Bew: (Forts.)

" iv) $\Rightarrow$ i)": $\psi \in C_b(S)$, $t \mapsto F_\psi(t) := \mu(\{\psi \geq t\})$ *rechtsstetig*
$\Rightarrow$ *hat nur abzählbar viele Sprünge*
$\Rightarrow \mu(\{\psi \geq t\}) = \mu(\{\psi > t\})$ *für dx-fast alle* $t \in \mathbb{R}$.

$$\int_S \psi(x)\mu(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{\psi \geq t\})dt$$
$$\overset{iv)}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_n \mu_n(\{\psi \geq t\})dt \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \mu_n(\{\psi \geq t\})dt.$$

Satz 3.3 *Für eine Folge* $(\mu_n)_n$ *von W-Maßen auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *gilt* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *gdw.* $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*, in denen* $F_\mu(.)$ *stetig.*

Bew: *Folgt aus Satz 3.2 iv), da* $\mu(\{x\}) = F_\mu(x) - \lim\limits_{y \nearrow x} F_\mu(y) \, \forall x \in \mathbb{R}$,
d.h. $\mu([a, b]) = \mu((a, b))$, *falls* F_μ *in a und b stetig.* $\square$

Satz 3.4 (Skorokhod) *Falls* $X_n \Rightarrow X$ *für eine Familie von* $\mathbb{R}^d$*-wertigen ZV'en, so ex. ein W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und* $\tilde{X}, \tilde{X}_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *mit* $X \sim \tilde{X}, X_n \sim \tilde{X}_n$, *s.d.* $\tilde{X}_n \to \tilde{X}$ *P-fast sicher.*

Bew: *Ohne Beweis. Ansonsten [Durrett], Kap. 8.* $\square$

Anwendung vom ZGS

Korollar 3.1 *Falls $(X_n)_n$ Folge unabh. id. vert. reeller ZV'en mit $m = E(X_1)$ und $\sigma^2 = V(X_1)$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\,m}{\sqrt{n}\sigma} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du =: \Phi(t).$$

Bew: *Folgt aus ZGS und Satz 3.3, da $t \to F(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du$ stetig.*

Bemerkung $t \to \Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du$ **'Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung'**.

Bsp. 3.1 *X_i unabh. Bernoulli-verteilt mit Parameter p*
$\Rightarrow E(X_1) = p$, $V(X_1) = p(1-p)$.
($\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i$ ist $B(n,p)$ binomialverteilt.)
$\Rightarrow P[\sum_{i=1}^n X_i \leq s]$
$= P[(\sum_{i=1}^n X_i - np)/\sqrt{np(1-p)} \leq (s-np)/\sqrt{np(1-p)}]$
$\simeq \Phi[(s-np)/\sqrt{np(1-p)}]$, *falls n groß.*

Charakteristische Funktionen

Definition 3.2 *Sei $X \sim \mu$ eine R^d-werige ZV, dann heißt $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$,*

$$\varphi_X(\xi) = E(e^{i\langle \xi, X\rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\mu(dx)$$

charakteristische Funktion von X (bzw. von μ).

Bemerkung $\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\mu(dx) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle \xi, x\rangle)\mu(dx) + i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle \xi, x\rangle)\mu(dx) \in \mathbb{C}$,
mit $x \to \cos(\langle \xi, x\rangle)$, $x \to \sin(\langle \xi, x\rangle) \in C_b(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_X(.)$ *wohldef.*

Satz 3.5 *Eigenschaften von φ_X:*

1. $|\varphi_X(\xi)| \leq 1$ *und* $\varphi_X(0) = 1$
2. $\varphi_X(.)$ *ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^d$:*
   $|\varphi_X(\xi+\eta) - \varphi_X(\xi)| \leq \int |e^{i\langle \xi+\eta, x\rangle} - e^{i\langle \xi, x\rangle}|\mu(dx)$
   $= \int |e^{i\langle \eta, x\rangle} - 1|\mu(dx) \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\longrightarrow} 0$ *für* $\eta \to 0$.
3. $\varphi_{aX+b}(\xi) = e^{i\langle b, \xi\rangle}\varphi_X(a\xi)$, $\varphi_{-X}(\xi) = \overline{\varphi_X(\xi)}$,
4. *Für X und Y unabhängig ist* $\varphi_{X+Y}(\xi) = \varphi_X(\xi)\cdot\varphi_Y(\xi)$.

Bsp. 3.2 $\varphi_{\nu_{m,v}}(t) = e^{itm - \frac{1}{2}vt^2}$

Inversionsformel

Satz 3.6 *Falls* $\varphi = \varphi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *für* μ *W-Maß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *so gilt*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = \mu((a,b)) + \frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2}.$$

Bew:

- $\left| \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \right| = \left| \int_a^b e^{ist} ds \right| \leq |a - b|.$

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi(t) dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{its} \mu(ds) dt$$

$$\stackrel{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(s-a)} - e^{it(s-b)}}{it} dt \mu(ds)$$

$$\stackrel{t \to \cos(ct) \text{ gerade}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(s-a) - \sin t(s-b)}{t} dt \mu(ds)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [u(T, s-a) - u(T, s-b)] \, \mu(ds)$$

$$\text{mit } U(T,z) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(tz)}{t} dt$$

Bew. (Forts.)

- $U(T,z) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin(tz)}{t} dt = 2\int_0^{zT} \frac{\sin t}{t} dt$

$$\xrightarrow{T\to\infty} 2\,\mathrm{sign}(z) \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \mathrm{sign}(z)\pi,$$

mit $\mathrm{sign}(z) := \mathbb{1}_{z>0} - \mathbb{1}_{z<0}$.

- $\exists\, C > 0 : |U(T,z)| \leq C \,\forall T, z$

$$\overset{\text{Dom. Konv.}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} [\mathrm{sign}(s-a) - \mathrm{sign}(s-b)]\mu(ds)$$

$$= \frac{1}{2}[\mu(\mathbb{R}_{>a}) - \mu(\mathbb{R}_{<a}) - (\mu(\mathbb{R}_{>b}) - \mu(\mathbb{R}_{<b}))]$$

$$= \frac{1}{2}[\mu(]a,b]) + \mu([a,b[)]$$

$$= \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}))$$

Korollar 3.2 (Eindeutigkeitssatz) *Ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist duch $\varphi_\mu(.)$ eindeutig bestimmt.*

Bew: *Für $F = F_\mu$ stetig in a,b $\Rightarrow F(b) - F(a) = \mu(]a,b[) \xrightarrow{a\to-\infty} F(b)$.*
$\overset{\text{Satz 3.6}}{\Longrightarrow} F_\mu(x)$ durch φ_μ festgelegt falls in x stet. $\overset{F_\mu \text{ rechtsst.}}{\Longrightarrow}$ in $x \in \mathbb{R}$.

Levý'scher Stetigkeitssatz

Satz 3.7 *Es gilt* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *genau dann wenn* $\varphi_{\mu_n}(t) \to \varphi_\mu(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

Bew: *"*$\Rightarrow$*": Klar, da* $x \to e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx) \in C_b(\mathbb{R}) + i\,C_b(\mathbb{R})$.
"$\Leftarrow$*" Folgt aus Satz 3.8 unten.*

Satz 3.8 *Sei* μ_n *eine Folge von Borel'schen W-Maßen auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\varphi_{\mu_n}(t) \to: \varphi(t)$ *für alle* t *für eine Folge von Borel'schen W-Maßen auf* $\mathbb{R}$ *und* $\varphi(.)$ *stetig in* 0*, so gilt* $\varphi = \varphi_\mu$ *für ein Borel'sches W-Maß* μ *auf* $\mathbb{R}$ *und* $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Lemma 3.2 *Sei (F_n) Folge von Funktionen mit $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ rechsttet. nichtfallend. Dann ex. Teilfolge n' und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, rechtsstt. nichtfallend s.d. $F_{n'}(t) \to F(t)$, falls F in t stet.*

Bew: (Idee) $(F_n(q))_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]\ \forall\, q \in \mathbb{Q} \overset{\text{Diagonalfolge}}{\Longrightarrow}$ *Ex. Teilfolge n', s.d* $H(q) := \lim_{n'} F_{n'}(q)$ *ex.* $\forall\, q \in \mathbb{Q}$. *Setze* $F(t) := \lim_{\mathbb{Q}\ni q \searrow t} H(q)$.

Lemma 3.3 *Für $\varphi(.) = \varphi_\mu(.)$ und $F = F_\mu$ und $T > 0$*

$$0 \le [1 - F(\tfrac{2}{T}) + F(-\tfrac{2}{T})] \le 2[1 - \tfrac{1}{2T}\textstyle\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt]$$

Bew:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt \overset{\text{Fubini}}{=} \int_R \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{itx}dt\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(Tx)}{Tx}\mu(dx)$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(Tx)}{Tx}\right| \mu(dx) \le \mu(\{|x| < l\}) + \frac{1}{Tl}\mu(\{|x| \ge l\})$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt \ge \mu(\{|x| \ge l\}) - \frac{1}{Tl}\mu(\{|x| \ge l\})$$

$$= (1 - \frac{1}{Tl})\mu(\{|x| \ge l\}) \ge (1 - \frac{1}{Tl})[F(-l) + 1 - F(l)]$$

Beh. folgt für $l := \frac{2}{T}$.

Bew: (Satz 3.8) *Sei n' Teilfolge und F gemäß Lemma 3.2, so dass*

$$F_{n'}(t) \to F, \text{ falls } F \text{ stet. in } t.$$

Sei T so gewählt, dass F stet. in $\frac{2}{T}$ und in $-\frac{2}{T}$.

$$\overset{Lemma\ 3.3}{\Longrightarrow} 0 \le [1 - F_{\mu_{n'}}(\frac{2}{T}) + F(-\frac{2}{T})] \le 2[1 - \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} \varphi_{\mu_{n'}}(t)dt]$$

$$\overset{n \longrightarrow \infty}{\Longrightarrow} 0 \le [1 - F(\frac{2}{T}) + F(-\frac{2}{T})] \le 2[1 - \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt]$$

$$\overset{T \longrightarrow 0}{\Longrightarrow} 0 \le [1 - F(\infty) + F(-\infty)] \overset{\phi \text{ stetig in } 0}{\le} 2[1 - \phi(0)] = 0$$

$$\Rightarrow F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$\Rightarrow F = F_\mu \text{ für ein W-Maß } \mu.$$

$$\Rightarrow \mu_{n'} \Rightarrow \mu$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_\mu$$

D.h. μ durch φ eind. bestimmt, und jede Teilfolge $\mu_{n'}$ enthält eine Teilfolge n'', s.d. $\mu_{n''} \Rightarrow \mu$.

$\Longrightarrow \mu_n \Rightarrow \mu$ für die gesamte Folge μ_n. □

Satz von Lindeberg-Feller

Satz 3.9 *Es sei* $(X^{(n)})_{i=1,\dots,m_n}$, $n \in \mathbb{N}$ *eine Doppelfolge von reellen ZV'en, s.d.* $\{X_1^{(n)}, \dots, X_{m_n}^{(n)}\}$ *unabh. für alle* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{m_n} E(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{ und } \sum_{i=1}^{m_n} V(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2.$$

Dann sind äquivalent:

i) $X_n := \sum_{i=1}^{m_n} X_i^{(n)} \Rightarrow X \sim \nu_{\mu,\sigma^2}$ *und* $\sup_{i\in\{1,\dots,n_m\}} V(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

ii) Für alle $\epsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)}))^2; |X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)})| > \epsilon] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Bemerkung *Die Eigenschaft ii) heißt* **Lindeberg-Bedingung**.

Bew. von Lindeberg-Feller: Vorbereitung

Lemma 3.4 *Sei* $z_1, \dots, z_n, z'_1, \dots, z'_n \in \mathbb{C}$ *mit* $|z_i|, |z'_i| \leq 1$, *dann*

$$|\prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n z'_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|$$

Bew: *Duch Induktion nach* n *(Übung).*

Lemma 3.5 *Für* $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $|e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!}| \leq \min(\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!})$

Bew: *Induktion nach* n.
$n = 0$: $|e^{it} - 1| = |\int_0^t e^{is} ds| \leq |t|$ *und* $|e^{it} - 1| \leq 2 \rightsquigarrow$ *Beh.*
Ind.Schritt folgt aus $e^{it} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(it)^k}{k!} = \int_0^t [e^{is} - \sum_{k=0}^n \frac{(is)^k}{k!}] ds$.

Lemma 3.6 *Für* $X \sim \nu_{m_1, v_1}$, $Y \sim \nu_{m_2, v_2}$ *unabh. ist* $X + Y \sim \nu_{m_1+m_2, v_1+v_2}$

Bew:

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \\ &= e^{im_1 t - \frac{v_1}{2} t^2} e^{im_2 t - \frac{v_2}{2} t^2} = e^{it(m_1+m_2) - \frac{v_1+v_2}{2} t^2}. \end{aligned}$$

Bew. von Lindeberg-Feller: ii) $\Rightarrow$ i)

• O.b.d.A. $E(X_i^{(n)}) = 0$ und $\sigma^2 = 1$
(Andernfalls argumentiere mit $\hat{X}_i^{(n)} := \frac{X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)})}{\sigma}$.)
• Bezeichnungen
$\sigma_{n,i}^2 := V(X_i^{(n)})$, $\sigma_n^2 := \sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2$, $\varphi_{n,i}(t) := \varphi_{X_i^{(n)}}(t)$.
• Sei $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sup_{i \in \{1,\dots,n_m\}} \sigma_{n,i}^2 &\le \epsilon^2 + \sup_{i \in \{1,\dots,n_m\}} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon) \\ &\le \epsilon^2 + \sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{i \in \{1,\dots,n_m\}} \sigma_{n,i}^2 = 0.$$

• Sei $Z_n := \sum_{i=1}^{m_n} Z_i^{(n)}$ mit $Z_i^{(n)} \sim \nu_{0,\sigma_{n,i}}$, $i = 1, \dots, m_n$ unabh.
Mit $\tilde{\varphi}_{n,i}(t) := \varphi_{Z_i^{(n)}}(t)$.
$\Rightarrow \varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^{m_n} \tilde{\varphi}_{n,i}(t) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, d.h. $Z_n \Rightarrow \nu_{0,1}$.

Bew. von Lindeberg-Feller: ii) $\Rightarrow$ i) (Forts.)

- $$\left|\prod_{i=1}^{m_n}\varphi_{n,i}(t)-\prod_{i=1}^{m_n}\tilde\varphi_{n,i}(t)\right| \overset{\text{Lemma 3.4}}{\le} \sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-\tilde\varphi_{n,i}(t)|$$
$$\le \sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}^2| + \sum_{i=1}^{m_n}|\tilde\varphi_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}^2|$$
$$=: I + II$$

- Taylor & $\sup_{n,i}\sigma_{n,i}^2 < \infty \Rightarrow \exists C = C_t > 0$ s.d.
$$II \le C\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^4 \le C \sup_{i=i,\ldots,m_n}\sigma_{n,i}^2\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- $\overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow}$ Mit $K_t := 3|t|^2\min(|t|,1)$
$$\sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}| \le K_t\sum_{i=1}^{m_n}E[|X_i^{(n)}|^2\min(1,|X_i^n|)]$$
$$\le K_t\epsilon\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2 + K_t\sum_{i=1}^{m_n}E[|X_i^{(n)}|^2; |X_t^{(n)}| > \epsilon] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon.$$

Wegen $\epsilon > 0$ beliebig $\lim \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$ Beh. $\square$

Bew. von Lindeberg-Feller: i) $\Rightarrow$ ii)

- $\overset{\text{Tschebyshev}}{\Longrightarrow} \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) \leq \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} \frac{\sigma_{i,n}}{\epsilon^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
- $\overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow} \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} E[\min(2, |t X_i^n|)]$

$$\leq 2 \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) + \epsilon|t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow \log \varphi_{n,i}(t)$ definiert für $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$, falls n groß.

- $E(X_i^{(n)}) = 0 \overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq C|t|^2\sigma_{n,i}^2.$

$$\Rightarrow |\log(\varphi_{n,i}(t)) - (\varphi_{n,i}(t) - 1)|$$
$$= |\log(1 - (\varphi_{n,i}(t) - 1)) - (\varphi_{n,i}(t) - 1)|$$
$$\overset{\text{Taylor-Entw. von } z \to \log(z) \text{ in } z=1}{\leq} C|(\varphi_{n,i}(t) - 1)|^2 \leq Ct^4\sigma_{n,i}^4$$

- $|\sum_{i=1}^{m_n} \log \varphi_{n,i}(t) - \sum_{i=1}^{m_n} (\varphi_{n,i}(t) - 1)| \leq C \sum_{i=1}^{m_n} t^4\sigma_{n,i}^4$

$$\leq Ct^4\Big(\sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} \sigma_{n,i}^2\Big) \cdot \sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- $\log \varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \log \varphi_{n,i}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}$ nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_n} (\varphi_{n,i}(t) - 1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}.$$

Bew. von Lindeberg-Feller: i) $\Rightarrow$ ii) (Forts.)

- $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_n} \mathrm{Re}(\varphi_{n,i}(t) - 1) = \sum_{i=1}^{m_n} (\mathrm{Re}(\varphi_{n,i}(t)) - 1)$
  $= \sum_{i=1}^{m_n} (E[\cos(tX_i^{(n)})] - 1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(-\frac{t^2}{2}) = -\frac{t^2}{2}$
- Wegen $0 \le 1 - \cos(\theta) \le -\frac{\theta^2}{2}$, für $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon] \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \Big(\sigma_n^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| \le \epsilon]\Big) \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| \le \epsilon] \\
&\qquad \le \limsup_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[1 - \cos(tX_i^{(n)}); |X_i^{(n)}| \le \epsilon] \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[1 - \cos(tX_i^{(n)}); |X_i^{(n)}| > \epsilon] \\
&\qquad \le \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\epsilon^2 t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = \frac{2}{\epsilon^2 t^2}.
\end{aligned}$$

Mit $t \to \infty$ folgt die Lindeberg-Bedingung. $\square$

Satz von Berry-Esseén

Satz 3.10 *Für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ mit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh. ident. verteilt mit $E(X_1) = 0$, $V(X_1) = 1$ und $E(|X|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$ ex. $C > 0$, $\delta > 0$, s.d.*

$$\sup_{\{a\in\mathbb{R}\}} |P(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq a) - \frac{1}{2\pi}\int_a^\infty e^{-t^2/2} dt| \leq Cn^{-\delta}.$$

Bemerkung

- *Quantitative Fehlerabschätzung im Zentralen Grenzwertsatz*
- $\delta = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$ *(siehe Beweis unten).*

Berry-Esseén: Vorbereitungen

Lemma 3.7 *Falls $f \in C(\mathbb{R})$, $f \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx < \infty$ gilt*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi_f(y) dy$$

mit $\varphi_f(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$.

Bew: *O.B.d.A. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.*

$\rightsquigarrow$ Def. W-Maß $\eta(]a,b]) := \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \eta(\{a\}) = 0 \, \forall\, a \in \mathbb{R}$

Beh. folgt durch Ableiten der Inversionsformel (Satz 3.6) nach b.

Bemerkung

- $\varphi_\eta(t) = \varphi_f(t)$ *heißt* **'Fourier-Transformierte' von f.**
- $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi_f(y) dy$

$= \overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \overline{\varphi_f(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi_f(-y) dy$

Lemma 3.8 *Für $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < h < \frac{b-a}{2}$ und $f_{a,b,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$f_{a,b,h}(x) =$

$\mathbb{1}_{[a+h,b-h]}(x) + \mathbb{1}_{[a-h,a+h[}(x) \frac{x-a+h}{2} + \mathbb{1}_{]b-h,b+h]}(1 - \frac{x-b+h}{2h})$ *gilt*

$$f_{a,b,h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy} dy.$$

Bew: $\varphi_{f_{a,b,h}}(-y) = \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy}$ *(Nachrechnen).*

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Lemma 3.9 (Riemann-Lebesgue) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Bew: *Für $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}$ ist $|\int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx| = \frac{1}{n}|e^{inb} - e^{ina}| \leq \frac{2}{n}$.*
Hieraus für $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ durch Approximation (s. Übung).

Lemma 3.10 *Für μ, ν W-Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,h}(x)d(\mu-\eta)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}[\varphi_\mu(y) + \varphi_\nu(y)]\frac{e^{-iay}}{iy}\frac{\sin(hy)}{hy}dy.$$

mit $f_{a,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b,h}(x) = \mathbb{1}_{[a+h,\infty)}(x) + \mathbb{1}_{[a-h,a+h[}(x)\frac{x-a+h}{2}$.

Bew: *Lemma 3.8 und Fubini ergeben*

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,b,h}(x)(\mu(dx) - \nu(dx))$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}[\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)]\frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy}\frac{\sin(hy)}{hy}dy$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ ist $|\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)| \leq C|y|$ nahe bei 0, somit $y \to [\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)]\frac{e^{-iay}-e^{-iby}}{iy}\frac{\sin(hy)}{hy} \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.
Behauptung ergibt sich aus Riemann-Lebesgue mit $b \to \infty$.

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Satz 3.11 (Esseén-Ungl.) *Für μ, ν W-Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ und falls $\exists\, C > 0$, s.d. $\mu([a,b]) \leq C|b-a| \,\forall\, a < b$, dann*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} |\mu([a,\infty)) - \nu([a,\infty))| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\mu(y) - \varphi_\nu(y)| \frac{\sin(hy)}{hy^2} dy + 2hC$$

Bew:

- $\mathbb{1}_{[a,\infty)} \leq f_{a-h,h} \leq \mathbb{1}_{[a-h,\infty)} \Rightarrow$
$\eta([a,\infty)) - \mu([a,\infty)) \leq \int_{\mathbb{R}} f_{a-h,h} d\eta - (\int_{\mathbb{R}} f_{a-h,h} d\mu - 2hC)$
- $\mathbb{1}_{[a,\infty)} \geq f_{a+h,h} \geq \mathbb{1}_{[a+2h,\infty)} \Rightarrow$
$\mu([a,\infty)) - \eta([a,\infty)) \leq (\int_{\mathbb{R}} f_{a+h,h} d\mu + 2hC) - \int_{\mathbb{R}} f_{a+h,h} d\nu$

$$\Rightarrow \sup_a |\eta([a,\infty)) - \mu([a,\infty))| \leq \sup_a \left| \int_{\mathbb{R}} f_{a,h}(x) d(\mu - \eta)(x) \right| + 2hC$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sup_a \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\lambda(x) - (\varphi_\mu(x)| \frac{\sin(hy)}{hy^2} dx + 2hC. \qquad \square$$

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Lemma 3.11 *Sei X ZV mit $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ und $E(|X|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$, dann*

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + r(t) \text{ mit } \limsup_{t \to 0} |r(t)|/|t|^{2+\alpha} < \infty.$$

Bew: *Folgt aus Lemma 3.5 für $n = 2$. (s. Übung).*

Bemerkung *Alternative Formulierung:* $\varphi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(|t|^{2+\alpha})$.

Korollar 3.3 *Falls $(X_n)_n$ unabh. Folge von ident. verteilten ZV'en mit $E(X_1) = 0$, $V(X_1) = 1$ und $E(|X_1|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$, so ex. $C > 0$, s.d. für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$*

$$|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - \exp(-t^2/2)| \leq \frac{|t|^{2+\alpha}}{n^\alpha} \text{ falls } |t| \leq n^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Bew: $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})^n = \exp(n \log \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n}))$.
Beh. folgt aus Lemma 3.11 mit Taylor-Entw. für exp *und* log.

Berry-Esseén: Beweis

Esseén-Ungl. für $\eta = \eta_n =$ Verteilung von $S_n/\sqrt{n}$ und $\mu = \nu_{0,1}$

$$\Rightarrow \sup_{a\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) - \nu_{0,1}([a,\infty))\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \frac{|\sin(ht)|}{ht^2} dt + Ch$$

mit $\theta := \frac{\alpha}{2+\alpha}$

$$\leq \frac{C}{h}\int_{|t|\leq n^\theta} \dots dt + \frac{C}{h}\int_{|t|\geq n^\theta} \dots dt + Ch$$

$$\stackrel{\text{Kor. 3.3}}{\leq} \frac{C}{h}\int_{|t|\leq n^\theta} \frac{|t|^\alpha}{n^\alpha} dt + \frac{C}{h}\int_{|t|\geq n^\theta} \frac{1}{t^2} dt + Ch$$

$$\leq \frac{C}{h}(n^{(\alpha+1)\theta-\alpha} + n^{-\theta}) = \frac{C}{hn^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + Ch$$

Die Behauptung folgt durch Wahl von $h = h_n = n^{-\frac{\alpha}{2(2+\alpha)}}$ $\square$

Gesetz vom Iterierten Logarithmus

Satz 3.12 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabh. Folge von ident. verteilten Zufallsvariablen mit $E(X_1) = 0$ und $V(X_1) = 1$, dann gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dass*

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\log(\log n)}} = \sqrt{2} \\ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\log(\log n)}} = -\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \textit{fast sicher.}$$

Bemerkung $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = \infty$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n} S_n = 0$ *(s. Übung 9).*

Satz vom Iterierten Logarithmus – Vorbereitungen

Lemma 3.12 *Für $a > 0$ hinreichend groß gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1+a)^2}{2}} \leq \nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Bew: $\nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty dt \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \int_a^\infty t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{a^2/2}$.
Für a hinreichend groß ist $e^{-t}(t+1) \leq 1$ für alle $t \geq a$, somit
$\nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} e^{-t}(t+1) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+a)^2/2}$. □

Lemma 3.13 (Ottaviani-Skorokhod) *Für $X_1, \ldots, X_n$ unabh. ZV'en, $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ und $\eta, \epsilon > 0$ gilt*

$$P(\max_{m \leq j \leq n} |S_j| \geq \eta + \epsilon) \cdot \min_{m \leq j \leq n} P(|S_j - S_n| < \epsilon) \leq P(|S_n| \geq \eta)$$

bzw.

$$P(\max_{m \leq j \leq n} S_j \geq \eta + \epsilon) \cdot \min_{m \leq j \leq n} P(S_j - S_n < \epsilon) \leq P(S_n \geq \eta)$$

Bew: *Analog zum Beweis der Levý-Ungleichung (Lemma 2.9).*

Iterierter Logarithmus – Beweis

1) Obere Schranke: $\limsup \frac{S_n}{\phi(n)} \overset{!}{\leq} \sqrt{2}$

Bemerkung *Zusatzbed. für Bew. hier:* $E(|X_1|^{2+\alpha}) < \infty$ *für ein* $\alpha > 0$.

Sei $\phi(n) := \sqrt{n \log(\log n)}$

- Zeige für alle $\lambda > \sqrt{2}$ ex. Folge $n_k \nearrow \infty$, s.d.

$$\sum_n P(\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j \geq \lambda \phi(k_{n-1})) < \infty.$$

Falls richtig, $\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j}{\phi(k_{n-1})} \leq \lambda$ fast sicher.

$\overset{\phi \text{ monoton}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{S_n}{n} \leq \lambda$ fast sicher $\forall \lambda > \sqrt{2} \rightsquigarrow$ für $\lambda = \sqrt{2}$.

- $\overset{\text{Lemma 3.13}}{\Longrightarrow} P(\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j \geq \lambda) \leq 2P[S_{k_n} \geq (\lambda - \sigma)\phi(k_{n-1})]$

falls $\sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[S_j \geq \sigma \phi(k_{n-1})]$ für ein $0 < \sigma < \lambda$.

Letzteres gilt für hinreichend große n, denn

$$\sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[S_j \geq \sigma\phi(k_{n-1})] \leq \sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[|S_j| \geq \sigma\phi(k_{n-1})]$$

$$\leq \sup_{1 \leq i \leq k_n} P[|S_j| \geq \sigma\phi(k_{n-1})] \overset{\text{Tschebyshev}}{\leq} \frac{k_n}{\sigma^2 \phi^2(k_n)}$$

$$= \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{\sigma^2 \log(\log(k_{n-1}))} \to 0, \text{ falls } \limsup_n k_n/k_{n-1} < \infty$$

• Bleibt zu zeigen: $\forall \lambda' > \sqrt{2}$ ex. Folge $k_n \nearrow \infty$ mit $\limsup_n k_n/k_{n-1} < \infty$, s.d.

$$\sum_n P(S_{k_n} \geq \lambda' \phi(k_{n-1})) < \infty.$$

• Wähle $k_n := \lfloor \rho^n \rfloor$ mit $\rho > 1$, dann $k_n/k_{n-1} \longrightarrow \rho$ und

$$\frac{\phi(k_n)}{\phi(k_{n-1})} = \sqrt{\frac{\lfloor \rho^n \rfloor}{\lfloor \rho^{n-1} \rfloor}} \sqrt{\frac{\log\log \lfloor \rho^n \rfloor}{\log\log \lfloor \rho^{n-1} \rfloor}} \longrightarrow \sqrt{\rho}.$$

Wegen $\lambda' > \sqrt{2}$ ist $\lambda'' := \lambda'/\sqrt{\rho} > \sqrt{2}$ falls $\rho > 1$ hinr. nahe 1.

$\Rightarrow$ genügt zu zeigen: Für $\lambda > 1$ und $\rho > 1$ ist

$$\sum_n P(S_{k_n} \geq \lambda \phi(k_n)) < \infty. \text{ mit } k_n = \lfloor \rho^n \rfloor.$$

• $\overset{\text{Berry-Esseen}}{\Longrightarrow}$ $P(S_{k_n} \geq \lambda \phi(k_n)) \leq \nu_{0,1}([a_n, \infty)) + C k_n^{-\theta}$ mit $a_n := \lambda \phi(k_n)/\sqrt{k_n}$ und $\theta > 0 \Rightarrow \sum_n k_n^{-\theta} < \infty$.

• $\overset{\text{Lemma 3.12}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{aligned} \nu_{0,1}([a_n, \infty)) &\leq C e^{-\frac{1}{2} a_n^2} = C e^{-\lambda^2/2 \log\log \lfloor \rho^n \rfloor} \\ &\leq C' e^{-\lambda^2/2 \log\log \rho^n} = C n^{-\lambda^2/2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_n \nu_{0,1}([a_n, \infty)) < \infty \rightsquigarrow$ Beh.

Bew. Iterierter Logarithmus (Forts.)

2) Untere Schranke: $\limsup \frac{S_n}{\phi(n)} \overset{!}{\geq} \sqrt{2}$

- Mit $k_n = \lfloor \rho^n \rfloor$ sei $Y_n = S_{k_{n+1}} - S_{k_n}$.

$$\sum_n P[Y_n \geq \lambda\phi(k_{n+1})] \overset{\text{Berry-Esseen}}{\geq} \sum_n (k_{n+1} - k_n)^{-\theta} + \sum_n \nu([b_n, \infty))$$

$$\overset{\text{Lemma 3.12}}{\geq} \sum_n (k_{n+1} - k_n)^{-\theta} + \sum_n \exp[-\frac{1}{2}(1 + b_n)^2]$$

wobei $b_n = \frac{\lambda\phi(k_{n+1})}{\sqrt{k_{n+1} - k_n}} = \lambda \frac{\sqrt{k_{n+1} \log\log k_{n_1}}}{\sqrt{k_{n+1} - k_n}} \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$

- $(1 + b_n)^2 = b_n^2(1 + \frac{1}{b_n})^2 \leq (1 + \epsilon)b_n^2$ für $\epsilon > 0$, für n groß.

Analog $b_n \leq \lambda\sqrt{\log\log \rho^{n+1}}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}(1 + \epsilon)$ für n groß.

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \sum_n e^{-\frac{1}{2}(1+b_n)^2} \geq C \sum_n n^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{\rho}{\rho-1}} = \infty$, falls $\frac{\lambda^2}{2}\frac{\rho}{\rho-1} < 1$.

- $\overset{\text{Borel-Cantelli \& } \lambda \to \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{Y_n}{\phi(k_{n+1})} \geq \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}}$

- $\Rightarrow \limsup_n \frac{S_{k_{n+1}}}{\phi(k_{n+1})} = \limsup_n (Y_n + \frac{S_{k_n}}{\phi(k_{n+1})}) \geq$

$\limsup_n Y_n - \limsup \frac{S_{k_n}}{\phi(k_{n+1})} \overset{\text{obere Schranke}}{\geq} \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho}}$

- $\Rightarrow \limsup_n \frac{S_n}{\phi(n)} \geq \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ f.s. für alle $\rho > 1 \overset{\rho \to \infty}{\Rightarrow}$ Beh.

Exkurs zu großen Abweichungen: Satz von Erdös-Renyi

Satz 3.13 *Sei (X_n) eine Folge von ident. vert. ZV'en, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s.d.*

$$\text{es existiert } I_A := -\lim_n \tfrac{1}{n} P(\tfrac{S_n}{n} \in A) \in]0, \infty[,$$

dann gilt für

$$R_m := \max\{l - k \,\big|\, 0 \le k < l \le m;\ \tfrac{S_l - S_k}{l-k} \in A\}$$

dass

$$\lim \tfrac{R_m}{\log m} = \tfrac{1}{I_A} \text{ fast sicher.}$$

Korollar 3.4 *Für eine Folge (X_i) von unabh. Bernoulli-p-Variablen gilt $\lim \frac{R_m}{\log m} = \frac{1}{\log(1/p)}$ fast sicher, wobei $R_m :\hat{=}$ Maximale Anzahl aufeinanderfolgender 1-en in den ersten m Versuchen.*

Bew: *Folgt aus Erdös-Renyi mit $A = \{1\}$ und Cramér, $I_{\{1\}} = \log(1/p)$.*

Bew. Erdös-Renyi – Untere Schranke

Für $T_r := \min\{l \mid \frac{S_l - S_k}{l-k} \in A \text{ für ein } 0 \le k \le l - r\}$ ist

$$\{R_m \ge r\} = \{T_r \le m\}.$$

Für $C_{k,l} := \{\frac{Sl - S_k}{l-k} \in A\}$ ist

$$\{T_r \le m\} \subset \bigcup_{k=0}^{m-r} \bigcup_{l=k+r}^{m} C_{k,l} \subset \bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{l=k+r}^{\infty} C_{k,l}$$

$$\Rightarrow P(T_r \le m) \le m \sum_{n=r}^{\infty} P(\tfrac{S_n}{n} \in A).$$

Mit $m = \lfloor e^{r(I_A - \epsilon)} \rfloor$, wobei $0 < \epsilon < 2I_A$ folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(T_r \le e^{r(I_A-\epsilon)}) \le C \sum_{r=1}^{\infty} e^{r(I_A-\epsilon)} \sum_{n=r}^{\infty} e^{-n(I_A - \frac{\epsilon}{2})} \le C \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\epsilon/2} < \infty.$$

$$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} P(\limsup_{r\to\infty} \{T_r \le e^{r(I_A-\epsilon)}\}) = 0$$

$$= P(\limsup_{r\to\infty} \{R_{\lfloor e^{r(I_A-\epsilon)} \rfloor} \ge r\})$$

Mit $r = r_n = \lfloor \frac{\log n}{I_A - \epsilon} \rfloor$ folgt wegen $\lfloor e^{\lfloor \frac{\log n}{I_A-\epsilon} \rfloor (I_A - \epsilon)} \rfloor = n$ für n groß, dass

$$P(\limsup_{n\to\infty} \{R_n \ge \tfrac{\log n}{I_A - \epsilon}\}) = 0$$

somit $\limsup_n \frac{R_n}{\log n} \ge \frac{1}{I_A}$ fast sicher.

Bew. Erdös-Renyi – Obere Schranke

Sei $B_l := \{\frac{S_{lr} - S_{(l-1)r}}{r} \in A\}$. $\Rightarrow \bigcup_{l=1}^{\lfloor m/r \rfloor} B_l \subset \{T_r \leq m\}$.
$(B_l)_l$ sind unabh. mit $P(B_l) = P(\frac{S_r}{r} \in A)$

$$\Rightarrow P(T_r > m) \leq 1 - P(\bigcup_{l=1}^{\lfloor m/r \rfloor} B_l) = (1 - P(B_1))^{\lfloor m/r \rfloor}$$
$$\leq e^{-\lfloor m/r \rfloor P(B_1)} = \exp(-\lfloor m/r \rfloor P(\frac{S_r}{r} \in A)).$$

Mit $m = \lceil e^{r(I_A + \epsilon)} \rceil$

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(T_r \geq e^{r(I_A+\epsilon)}) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \exp(-\frac{c_1}{r} e^{r(I_A+\epsilon)} e^{-r(I_A + \frac{\epsilon}{2})})$$
$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} \exp(-c_2 e_3^c r) < \infty.$$

$\xRightarrow{\text{Borel-Cantelli}}$ $T_r \leq e^{r(I_A+\epsilon)}$ für schließlich alle r, fast sicher.
$\xRightarrow{\text{s.o.}}$ $\liminf_n \frac{R_n}{\log n} \geq \frac{1}{I_A}$ fast sicher. $\square$

Kapitel 4:

Bedingte Erwartung

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 4.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $A \in F$ mit $P(A) > 0$, dann heißt $P_A : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$*

$$P_A(E) := \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit (von E) gegeben A.

Bemerkung

- *P_A ist ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.*
- *Alternative Notation $P_A(E) = P(E|A)$*

Bsp. 4.1 *$(\Omega, \mathcal{F}, P) \hat{=}$ W-Raum für zweifachen unabh. Münzwurf mit Erfolgsparam. $p \in]0,1[$.*
$A :\hat{=}$ Mindestens ein Mal Erfolg,
$E :\hat{=}$ Erster Münzwurf erfolgreich
$\Rightarrow P_A(E) = \frac{p(1-p)+p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$

Elementare Anwendungen

Satz 4.1 ("Satz von Bayes") *Falls $E \subset A$ ist $P(E) = P_A(E)P(A)$.*

Satz 4.2 ("Satz v. d. totalen Wahrsch'keit") *Falls $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ für $A_i \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt für $E \in \mathcal{F}$,*

$$P(E) = \sum_{i=1}^{N} P_{A_i}(E)\, P(A_i).$$

Bemerkung *Häufige Darstellung im "Baumdiagramm" ... (s. Tafel).*

Bsp. 4.2 *Wenn es regnet, nimmt Herr L seinen Schirm mit Wkeit 70% mit. Wenn es nicht regnet, lässt Herr L seinen Schirm mit Wkeit 90% zu Hause. Die Wkeit von Regen ist 30%.*

Wie wahrscheinlich regnet es, wenn Herr L seinen Schirm dabei hat?

Bedingter Erwartungswert

Definition 4.2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein W-Raum und* $A \in F$ *mit* $P(A) > 0$, $X\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine ZV'e. Dann heißt*

$$E_A(X) := \frac{E(X \cdot \mathbb{1}_A)}{P(A)}$$

bedingter Erwartungswert von X **gegeben** A**.**

Bemerkung $E_A(X) = \int_\Omega X(\omega) P_A(d\omega)$.

Bsp. 4.3 *(Forts.)* $(\Omega, \mathcal{F}, P) \hat{=}$ *W-Raum für zweifachen unabh. Münzwurf mit Erfolgsparam.* $p \in]0, 1[$.
$A :\hat{=}$ *Mindestens ein Mal Erfolg,*
$X :\hat{=}$ *Anzahl der Erfolge*
$\Rightarrow E_A(X) = \frac{1p(1-p)+1(1-p)p+2p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{2}{2-p}$.

Bedingte Erwartung

Definition 4.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W-Raum und $X : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ eine ZV'e sowie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra, dann heißt $Z : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar mit*
1) Z ist $\mathcal{G}$-messbar
2) $\int_G ZdP = \int_G XdP \; \forall G \in \mathcal{G}$.
bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{G}$,

Bsp. 4.4 *Falls $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ für $A_i \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und*
$\mathcal{G} := \sigma\{A_i, i = 1, \dots, N\}$
Für $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ZV'e sei $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$Z := \sum_{i=1}^{n} E_{A_i}(X)\, \mathbb{1}_{A_i}$$

$\Rightarrow$ Z ist bed. Erwarung von X gegeben $\mathcal{G}$.

Satz 4.3 *Für Z und Z' bed. Erw. von X geg. $\mathcal{G}$ ist $Z = Z'$ fast sicher.*

Bew: $\int\limits_G ZdP = \int\limits_G XdP = \int\limits_G Z'dP \, \forall G \in \mathcal{G} \overset{Z,\, Z' \; \mathcal{G}\text{-messbar}}{\Longrightarrow} P(Z \neq Z') = 0.$

Notation $Z := E(X|\mathcal{G})$ ($\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow}$ eindeutig fast sicher, falls ex.)

Bedingte Erwartung – Eigenschaften

Satz 4.4 *1)* $X \geq 0 \Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ *f.s.*
2) X *integrierbar und* $Z_\pm = E(X_\pm|\mathcal{G}) \Rightarrow Z_+ - Z_- = E(X|\mathcal{G})$
3) X_1, X_2 *integrierbar und* $Z_i = E(X_i|\mathcal{G}) \Rightarrow$
$Z := Z_1 + Z_2 = E(X_1 + X_2|\mathcal{G})$

Bew: *1)* $\{Z < 0\} \in \mathcal{G} \Rightarrow \int_{\{Z<0\}} ZdP = \int_{\{Z<0\}} XdP \geq 0$
$\Rightarrow P(\{Z < 0\} = 0$, *weil andernfalls* $\int_{\{Z<0\}} ZdP < 0$.

2) X *int'bar* $\Leftrightarrow \min(E(X_+), E(X_-)) < \infty. \overset{1)}{\Longrightarrow} Z_\pm \geq 0$ *und*
$\int\limits_\Omega Z_\pm dP = \int\limits_\Omega X_\pm dP \Rightarrow \min(E(Z_+, Z_-)) < \infty$
$\Rightarrow Z := Z_+ - Z_i \in \overline{\mathbb{R}}$ *wohldefiniert u. integrierbar,* $\mathcal{G}$*-messbar mit*
$\int\limits_G ZdP = \int\limits_G Z_+ - \int\limits_G Z_- dP = \int\limits_G X_+ - \int\limits_G X_- dP = \int\limits_G XdP \, \forall G \in \mathcal{G}$.

3) $Z_i \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P) \Rightarrow Z := Z_1 + Z_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *mit*
$\int_G ZdP = \int_G (Z_1 + Z_2)dP = \int_G (X_1 + X_2)dP \, \forall G \in \mathcal{G}$.

Bedingte Erwartung – Existenz

Satz 4.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra und $X : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, dann ex. $E(X|\mathcal{G})$.*

Bew: *1. Schritt – falls $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:*

$\overset{\text{Projektionssatz 4.6}}{\Longrightarrow}$ *Mit $U := L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) =: V$ sei Z die orthogonale Projektion von X auf U*

$\Rightarrow$ *Z $\mathcal{G}$-messbar. Für $G \in \mathcal{G}$ ist $\mathbb{1}_G \in U$*

$$\Rightarrow 0 = E((Z - X) \cdot \mathbb{1}_G) = \int_G Z dP - \int_G X dP \ .$$

$$\Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G}).$$

2. Schritt – falls $X \geq 0$:

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $X_k := \min(X, k) \Rightarrow X_k \in L^2 \Rightarrow Z_k := E(X_k|\mathcal{G})$ ex.

$X_{k+1} - X_k \geq 0 \Rightarrow Z_{k+1} - Z_k = E(X_{k+1} - X_k|\mathcal{G}) \geq 0.$

$\overset{\text{Monot. Konvergenz}}{\Longrightarrow}$ *Für $Z := \lim_k Z_k$ $\mathcal{G}$-messbar, $G \in \mathcal{G}$*

$\int_G Z dP = \lim_k \int_G Z_k dP = \lim_k \int_G X_k dP = \int_G X dP \Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G})$

3. Schritt – falls X integrierbar: Setze $Z := E(X_+|\mathcal{G}) - E(X_-|\mathcal{G})$.

$\Rightarrow$ *Z wohldefiniert, $\mathcal{G}$-messbar, $\int_G Z dP = \int_G X dP \ \forall G \in \mathcal{G}$.* $\square$

Projektionssatz

Definition 4.4 *Ein Vektorraum $(V, \mathbb{K})$ mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{K}$, welches eine vollständiger Metrik auf V definiert gemäß*

$$d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_V := \sqrt{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle}$$

heißt **Hilbert Raum.**

Bsp. 4.5

- $V = \mathbb{R}^n$ *mit* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit* $\langle X, Y \rangle = E(X \cdot Y)$. *(Fischer-Riesz)*

Satz 4.6 *Sei $U \subset V$ ein (bzgl. der Metrik $d(.,.) = \|. - .\|$) abgeschlossener linearer Unterraum eines Hilbert-Raumes V. Dann ex. zu $v \in V$ ein eind. $u \in U$, s.d.*

$$\|u - v\| = \inf_{u' \in U} \|u' - v\|.$$

Bemerkung *Für $\xi \in U$ ist $\epsilon \to \varphi(\epsilon) := \|u + \epsilon\xi - v\|^2$ minimal in $\epsilon = 0$,*

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\epsilon}\varphi(0) = \langle u - v, \xi \rangle \quad \forall \xi \in U.$$

Bemerkung *u heißt* **orthogonale Projektion** *von v auf U.*

Beweis Projektionssatz

- $0 \le m := \inf_{u' \in U} \|u - v\| \overset{u' = 0 \in U}{\le} \|v\| < \infty$.
- Wähle Folge $u_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, s.d. $\|u_k - v\| \to m$.
- Beh.: Dann ist $(u_k)_k$ ist Cauchy-Folge in $U \subset V$, denn sonst ex. $\epsilon > 0$ und Teilfolge $(u_{k_n})_n$ s.d. $\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\| \ge \epsilon \, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Für $\tilde{u}_n := \frac{u_{n_k} + u_{n_{k+1}}}{2} \in U$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}_n - v\|^2 &= \frac{1}{4}\|(u_{n_k} - v) + (u_{n_{k+1}} - v)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|(u_{n_k} - v)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u_{n_{k+1}} - v)\|^2 - \frac{1}{4}\|(u_{n_k} - v) - (u_{n_{k+1}} - v)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|(u_{n_k} - v)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u_{n_{k+1}} - v)\|^2 - \frac{1}{4}\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}\epsilon^2 < m^2
\end{aligned}
$$

falls n hinreichend groß $\Rightarrow$ Widerspruch zu $m = \inf\limits_{u \in U} \|u - v\|$.

- $\overset{V \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \exists\, u := \lim_k u_k \overset{U \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} u \in U \Rightarrow \|v - u\| = m$.
- u eindeutig, da andernfalls $\|\frac{u + \tilde{u}}{2} - v\| < m$ (s.o.). $\square$

Bedingte Erwartung – Weitere Eigenschaften

Satz 4.7 *1)* $E(X|\mathcal{G}) = X$, *falls* X $\mathcal{G}$*-messbar.*
2) $E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}) = \alpha E(\alpha X|\mathcal{G}) + \beta E(Y|\mathcal{G})$
3) $E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G})$, *falls* X $\mathcal{G}$*-messbar.*
4) $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$, *falls* X *unabhängig von* $\mathcal{G}$.
5) $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ *falls* $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$
6) $\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G})$, *falls* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*
7) $E(XY|\mathcal{G}) \leq E(|X|^p|\mathcal{G})^{1/p} E(|Y|^q|\mathcal{G})^{1/q}$, *falls* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bew: *Folgt entweder direkt aus der Def. von* $E(.|\mathcal{G})$ *bzw. analog zu den Eigenschaften vom Erwartungswert (s. Übung.)*

Kapitel 5:

Markovketten

Definition 5.1 *Eine Fam. $(X_i)_{i\in I}$ von ZV'en $X_i : \Omega \to E$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten im messb. Raum $(E, \mathcal{E})$ heißt* **Stochastischer Prozess***.*

Bezeichnungen

- E – **'Zustandsraum'**
- $f : E \to \mathbb{R}$ messbar – **'Observable'**

Bsp. 5.1

- $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \in \mathbb{N}$, *mit ξ_i unabh. id. vert. reelle ZV'en.* $\rightsquigarrow E = \mathbb{R}$.
- $X_n \hat{=}$ *Sitzanordung der Studierenden im Hörsaal in der n-ten Sitzung.* $\rightsquigarrow E \hat{=}$ *Menge aller möglichen Sitzanordungen.*

Definition 5.2 *Sei I total geordnete Menge und $(X_i)_{i\in I}$ stoch. Prozess mit abzählbaren Zustandsraum $(E, \mathcal{E} = 2^E)$, s.d. für alle $i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq i_{N+1}$ und $A_i \in \mathcal{E}, e \in E$*

$$\begin{aligned} P(X_{i_{N+1}} \in A_{N+1} | X_{i_1} \in A_1, \ldots, , X_{i_{N-1}} \in A_{N-1}, X_{i_N} = e) \\ = P(X_{i_{N+1}} \in A_{N+1} | X_{i_N} = e) \end{aligned}$$

so heißt $(X_i)_{i\in I}$ **Markov-Prozess***.*

Bemerkung *$(X_i)_{i\in I}$ Markov $:\Leftrightarrow X_{i_{N+1}}$ ('künftiger Zustand') hängt nur von X_{i_N} ('Aktueller Zustand') ab, nicht von der weiteren Vergangenheit.*

Definition 5.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A, B, C \in \mathcal{F}$. Dann heißen A, B* **bedingt unabhängig gegeben** *C, falls $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$.*

Lemma 5.1 ("Markov-Lemma") *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A, B, C \in \mathcal{F}$*
1) A, B bedingt unabhängig gegeben C
2) $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3) $P(A \cap C|B) = P(A|C)P(C|B)$

Bew: *Übung.*

Bemerkung *Markov Eigenschaft $\Leftrightarrow$ Zukunft und Vergangenheit bedingt unabhängig gegeben die Gegenwart.*

Vereinbarung Im folgenden ist stets (falls nicht anders bezeichnet)

- E abzählbar mit $\mathcal{E} = 2^E$.
- $I = \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow (X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ **'Markov-Kette'**.

Definition 5.4 *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf E.*
*$\bullet P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_m = j|X_n = i)$, $i,j \in E$, $m \geq n \geq 0$, heißt (m,n)-**Übergangskern** von (X_k).*
*$\bullet$ (X_k) heißt **(zeitlich) homogen**, falls $P_{i,j}^{(m,n)} = P_{i,j}^{(m+k,n+k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*
*$\bullet$ $\lambda := Vert(X_0)$ heißt **Startverteilung** von $(X_k)_k$*

Satz 5.1 *Eine Markov-Kette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist homogen $\Leftrightarrow P_{i,j}^{(m,n)} = (P^{m-n})_{ij}$ (Matrixprodukt) mit $P = P^{1,0}$ (1-Schritt Übergangskern).*

Bew: *$\Leftarrow$ klar.*
Beweis von "$\Rightarrow$" durch Induktion nach $t = m-n$. Falls $t=1$ klar. Für $t+1$:
$P_{i,j}^{(m,n)} = P_{i,j}^{(m-n,0)} = P_{i,j}^{(t+1,0)} = P(X_{t+1} = j|X_0 = i)$
$= \sum_{o\in E} P(X_{t+1} = j, X_1 = o|X_0 = i)$
$\overset{\text{Markov-Lemma}}{=} \sum_{o\in E} P(X_{t+1} = j|X_1 = o)P(X_1 = o|X_i) = (P^t \cdot P)_{ij}.$

Bemerkung *$P =: (p_{ij})_{i,j\in E\times E}$ **'stochastische Matrix'**, d.h. $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1\,\forall i \in E$.*

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Definition 5.5 *Sei $(X_i)_{i\in I}$ ein stoch. Prozess mit Werten in E, dann heißt die Familie die W-Maße $(P_{i_1,\ldots,i_N})_{i_1\leq i_2,\cdots\leq i_N\in I}$*

$$P_{i_1,\ldots,i_N}(A_1,\ldots,A_N) := P(X_{i_1}\in A_1,\ldots,X_{i_N}\in A_N),\ A_i\in\mathcal{E}$$

die **endlich-dimensionalen Verteilungen von $(X_i)_{i\in I}$.**

Satz 5.2 *Die endlich-dimensionalen Verteilungen einer homog. Markovkette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sind durch λ (Startverteilung) und P (Übergangskern) eindeutig bestimmt.*

Bew: $P(X_n = e_n,\ldots,X_0 = e_0)$
$= P(X_n = e_n|X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)P(X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)$
$= P_{e_{n-1},e_n}P(X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)$
$= \cdots = \prod_{i=1}^n P_{e_n,e_{n-1}}P(X_1 = e_1, X_0 = e_0)$
$= \prod_{i=1}^n P_{e_n,e_{n-1}}P(X_1 = e_1|X_0 = e_0)P(X_0 = e_0)$
$= \prod_{i=0}^n P_{e_n,e_{n-1}}\lambda(e_0)$. $\rightsquigarrow$ *eind. bestimmt durch P und λ.*
Wegen $P(X_n\in A_n,\ldots,X_0\in A_0) = \sum_{(e_n,\ldots,e_0)\in A_n\times\ldots A_0}P(X_n = e_n,\ldots,X_0 = e_0)$ *folgt hieraus der allgemeine Fall.* $\square$

Realisierung auf dem kanonischen Pfadraum

Definition 5.6 $\Omega := \mathbb{E}^{\mathbb{N}_0} = \{\omega = (\omega_i, i \in \mathbb{N}_0) | \omega_i \in E\}$ *heißt* **'kanonischer Pfadraum'**, $X_i : \Omega \to E$, $X_i(\omega) := \omega_i$ **'Koordinatenabbildung'**.

Satz 5.3 *Zu λ W-Maß auf E und $P = (P_{i,j})_{i,j \in E \times E}$ stochastische Matrix ex. genau ein Maß auf $(\Omega, 2^{\Omega})$, s.d. $(X_k)_{k \geq 0}$ mit $X_k : \Omega \to E$, k-te Koordinatenabbildung eine Markov-Kette auf E definiert mit Übergangskern P und Startverteilung λ.*

Bew:
- *Def. Inhalt $P_0(Z)$ auf 'Zylindermengen' der Form $Z = A_1 \times \ldots A_N \times E \times E \ldots$ durch*
$$P_0(Z) = \sum_{(e_0, \ldots, e_N) \in A_1 \times \ldots A_N} \lambda(e_0) \prod_{i=0}^{N-1} P_{e_i, e_{i+1}}$$
- *P_0 is Prämaß auf $\mathcal{Z} = \{Z | Z$ Zylindermenge$\}$*

$\Rightarrow P_0$ eindeutig fortsetzbar als Maß auf $\sigma(\mathcal{Z}) = 2^{\Omega}$. $\square$

Bemerkung $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *mit* $X_k : \Omega = E^{\mathbb{N}_0} \to E$ *heißt* **Koordinatenprozess**.

Satz 5.4 *Zu λ und P gibt es eine im Sinne der endl. dimensionalen Verteilungen eindeutige homog. Markov-Kette $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ auf E mit Übergangsmatrix P und Startverteilung λ.*

Ausblick: Messbarer Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$

Definition 5.7 *Sei I eine geordnete Menge und $(X_i)_{i\in I}$ ein stochastischer Prozess mit Werten im messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$. Dann heißt $(X_i)_i$ Markov'sch, falls $\forall f : E \to \mathbb{R}$ messbar beschränkt, $i \geq j \in I$,*

$$E[f(X_i)|\sigma(X_k, k \leq j)] = E[f(X_i)|\sigma(X_j)].$$

Bemerkung *Äquivalent zu Def. 5.2, falls E abzählbar (wähle $f = \mathbb{1}_j$).*

Definition 5.8 *Eine Familie $(P_x)_{x\in\mathbb{E}}$ von W-Maßen auf $(E, \mathcal{E})$, s.d. $x \to P_x(A)$ messbar für $A \in \mathcal{E}$, heißt* **Markov-Kern** *auf $(E, \mathcal{E})$.*

Bemerkung *Interpretation $P_x(A) = P(X_1 \in A|X_0 = x)$.*

Satz 5.5 *Zu einem Markovkern $(P_x)_{x\in E}$ und einer W-Maß λ auf E ex. eine (im Sinne der endl. dim. Verteilungen) eind. Markov-Kette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass $X_0 \sim \lambda$ und für $f : E \to \mathbb{R}$ messbar $E[f(X_{k+1})|\sigma(X_1, \ldots, X_k)] = \int_E f(z) P_{X_k}(dz)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Trefferzeiten und -wahrscheinlichkeiten

Definition 5.9 *Sei $(X_k)_{k\geq 0}$ ein stoch. Prozess auf E und $A \subset E$, dann heißt*

$$T_A := \inf\{k \geq 0 | X_k \in A\}$$

Trefferzeit von A.
Für $i \in E$ heißt $h_i^A := E(T_A < \infty | X_0 = i)$
Trefferwahrscheinlichkeit.

Bsp. 5.2 (Ruinproblem) *$(X_k)_k$ Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit $P_{ij} = p$ falls $j = i + 1$, bzw. $P_{ij} = q$ falls $j = i - 1$, $p + q = 1$ und $i \geq 1$, sowie $P_{00} = 1$, anonsten $P_{ij} = 0$. Mit $A = \{0\} \rightsquigarrow T_{\{0\}} \hat{=}$ "Ruinzeit".*

Satz 5.6 *$E \ni i \mapsto h_i^A \in [0, 1]$ ist die minimale nichtnegative Lösung von*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{für } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A & \text{für } i \in A^c. \end{cases}$$

Bemerkung *$(h_i^A)_{i \in E}$ minimale nichtnegative Lösung $:\Leftrightarrow g_i \geq h_i^A$ für alle $i \in E$, falls $g_. \geq 0$ ebenfalls Lösung.*

Lemma 5.2 *Falls $(X_k)_k$ Markov-Kette auf E und $f : E^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ messbar*

$$E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = i]$$
$$= E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_n = i) \overset{\text{Falls } (X_k) \text{ homog.}}{=} E[f(X_0, X_1, \dots)|X_0 = i).$$

Bew: *Für $f = \mathbb{1}_Z$ mit $Z = \{e_1\} \times \dots \{e_N\} \times E \times E \dots \in \mathcal{Z}$ ergibt sich Beh. durch Nachrechnen. $\rightsquigarrow$ Für allg. f durch Approximation.*

Bew: *Für $i \in A$ ist $P(T^A = 0|X_0 = i) = 1$, also $h_i^A = 1$.*
(von Satz 5.6) *Für $i \in A^c$ ist $P(T^A \geq 1|X_0 = i) = 1$*

$$h_i^A = P(T_A < \infty|X_0 = i) = P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_0 = i)$$
$$= \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A, X_1 = j|X_0 = i)$$
$$= \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_1 = j, X_0 = i)P(X_1 = j|X_0 = 0)$$
$$\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_1 = j)P(X_1 = j|X_0 = 0)$$
$$\overset{(X_k) \text{ homog.}}{=} \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 0 : X_n \in A|X_0 = j)p_{ij} = \sum_{j \in E} h_j^A p_{ij}.$$

Bew: (Satz 5.6, Forts.)

Minimalität von h_i^A:
Sei $g_i \geq 0, i \in E$ weitere Lösung. Für $i \in A$ ist $1 = h_i^A \geq 1 = g_i$.
Für $i \in A^c$

$$\begin{aligned}
g_i &= \sum_{j\in E} g_j p_{ij} = \sum_{j\in A} p_{ij} 1 + \sum_{j\in A^c} p_{ij} g_j \\
&= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\in A^c} p_{ij} \sum_{k\in E} p_{jk} g_k \\
&= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\in A^c} p_{ij} \sum_{k\in A} p_{jk} + \sum_{j\in A^c} p_{ij} \sum_{k\in A^c} p_{jk} g_k \\
&= P(T_A = 1|X_0 = i) + P(T_A = 2|X_0 = i) + \sum_{j\in A^c} p_{ij} \sum_{k\in A^c} p_{jk} g_k \\
&= P(T_A = 1|X_0 = i) + P(T_A = 2|X_0 = i) + \cdots + P(T_A = N|X_0 = i) \\
&\qquad + \sum_{j_1\in A^c} \sum_{j_2\in A^c} \cdots \sum_{j_N\in A^c} p_{ij_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{N-1}j_N} g_{j_N} \\
&\overset{g \geq 0}{\geq} P(T_A \leq N|X_0 = i) \quad \forall N \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ und monton. Konvergenz
$\Rightarrow g_i \geq P(T_A < \infty|X_0 = i) = h_i^A$. $\square$

Anwendung – Ruinwahrscheinlichkeit

Bsp. 5.2 (Forts.)

$h_i = P(T^{\{0\}} < \infty X_0 = i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ ist die minimale nichtnegative Lösung von $h_0 = 1$ und $h_i = ph_{i+1} + qh_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$.

• Falls $p \neq q$: $\Rightarrow h_i = A + B(\frac{q}{p})^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

Falls $p < q$ folgt aus $h_i \in [0, 1]$, dass $B = 0$ und wegen $A = h_0 = 1$, dass $h_i = 1$, d.h. Ruin fast sicher in endlicher Zeit.

Falls $p > q$, folgt wegen $h_0 = 1$ dass $A + B = 1$, d.h. $h_i = (\frac{q}{p})^i + A(1 - (\frac{q}{p})^i)$, und wegen $h \geq 0$, dass $A \geq 0$. $\Rightarrow$ Minimale Lösung gegeben durch $h_i = (\frac{q}{p})^i$.

D.h. Ruinwahrscheinlichkeit echt kleiner eins, eponentiell fallend mit dem Anfangskapital i.

• Falls $p = q$: $\Rightarrow h_i = A + Bi$, wobei wegen $0 \leq h \leq 1$ gelten muss, dass $B = 0$ und $A = 1 \Rightarrow h_i = 1 \forall i$.

Mittlere Trefferzeit

Definition 5.10 *Für $A \subset E$ heißt $k_i^A := E(T_A|X_0 = i)$* **mittlere Trefferzeit**.

Satz 5.7 *$k_i^A, i \in E$ ist die minimale nichtneg. Lösung von*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A & \text{für } i \in A^c. \end{cases}$$

Lemma 5.3 *Falls $i, j \in \mathbb{E}$, $p_{ij} > 0$, $i \in A^c$, dann*

$$E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) = 1 + E(T_A|X_0 = j).$$

Bew: (Satz 5.7) *Falls $k_i^A = 0$ falls $i \in A$. Falls $i \in A^c$ ist $T_A \geq 1$ $P(.|X_0 = i)$- f.s.*

$$\begin{aligned} k_i^A = E(T_A|X_0 = i) &= \sum_{j \in E} E(T_A \mathbb{1}_{\{j\}}(X_1)|X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in E} E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) p_{ij} \overset{\text{Lemma 5.3}}{=} \sum_{j \in E} p_{ij}(1 + E(T_A|X_0 = j)) \\ &= 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A. \end{aligned}$$

Bew: (Lemma 5.3)

Falls $j \in A$:

$E(T_A|X_0 = i, X_1 = j) = E(1|X_0 = i, X_1 = j) = 1 = 1 + E(T_A|X_0 = j)$.

Falls $j \in A^c$ und $E(T_A|X_0 = j) = \infty$:

$E(T_A|X_1 = j, X_0 = i) \geq 1 + p_{ij}E(T_A|X_0 = j) = \infty$, *also Beh.*

Falls $j \in A$ und $E(T_A|X_0 = j) < \infty$:

$E(T_A|X_0 = i, X_1 = j) = \sum_{n\geq 2} n\, P(T_A = n|X_0 = i, X_1 = j)$ *und für* $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
&P(T_A = n|X_0 = i, X_1 = j) \\
&\qquad = P(X_1 \in A^c, \ldots, X_{n-1} \in A^c, X_n \in A|X_0 = i, X_1 = j) \\
&\qquad \overset{\text{Lemma 5.2}}{=} P(X_0 \in A^c, \ldots, X_{n-2} \in A^c, X_{n-1} \in A|X_0 = j) \\
&\qquad = P(T_A = n-1|X_0 = j)
\end{aligned}$$

Bew: (Lem. 5.3, Forts.)

$$\Rightarrow E(T_A|X_0=i,X_1=j)=\sum_{n\geq 2} n\,P(T_A=(n-1)|X_0=j)$$

$$=\sum_{n\geq 2}(n-1)\,P(T_A=(n-1)|X_0=j)+\sum_{n\geq 2}P(T_A=n-1|X_0=j)$$

$$=E(T_A|X_0=j)+P(T_A<\infty|X_0=j)=E(T_A|X_0=j)+1,$$

weil $E(T_A<\infty|X_0=1)<\infty \Rightarrow P(T_A<\infty|X_0=i)=1.$ $\square$

Bsp. 5.3 $E=\{0,1,2,3\}$, $p_{00}=1$, $p_{12}=p_{23}=p$, $p_{10}=p_{21}=q$, $p_{33}=1$, $p+q=1$, $A=\{0,3\}$.
$k_i := k_i^A$ *für* $i\in\{0,1,2,3\}$.
$k_i=0$ *für* $i=0,3$.
$k_i=1+pk_{i+1}+qk_{i-1}$ *für* $i=1,2$.
$\Rightarrow k_1=1+pk_2$ *und* $k_2=1+qk_1$
$\Rightarrow k_1=\frac{1+p}{1-pq}$ *und* $k_2=\frac{1+q}{1-pq}$.

Transienz und Rekurrenz

Definition 5.11 *Sei $(X_k)_k$ eine homog. Markov-Kette auf $(E, \mathcal{E})$.*
- *$i \in E$ heißt* **rekurrent**, *falls $P(X_n = i$ für unendl. viele $n) = 1$.*
- *$i \in E$ heißt* **transient**, *falls $P(X_n = i$ für unendl. viele $n) = 0$.*

Definition 5.12 *Für $A \subset E$ heißt $T_+^A := \inf\{k \geq 1 | X_k \in A\}$* **Eintrittszeit** *von A.*

Bsp. 5.4 $E = \mathbb{N}_0$, $p_{i,i+1} = 1 \forall i$, $A = \{0\}$
$\Rightarrow T_A = 0$ *und* $T_+^A = \infty$ $P(.|X_0 = 0)$*-f.s.*

Definition 5.13 *Für $A = i$ setze $\tau_i := T_A^+$ bzw.*

$$\tau_i^{(k)} := \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \tau_i & \text{falls } k = 1 \\ \inf\{l \geq \tau_i^{(k-1)} + 1 | X_l = i\} & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

k-**te Eintrittszeit** *sowie*

$$S_i^{(k)} := \tau_i^{(K)} - \tau_{i-1}^{(k)} \ k\text{-}\mathbf{te\ Exkursion},\ k \geq 1.$$

Vereinbarung Im folgenden $P_i(.) := P(.|X_0 = i)$
(Wahrscheinlichkeiten für die MK bei Start in $i \in E$.)

Lemma 5.4 *Es sei (X_k) eine homog. MK und $i \in E$, dann ist*

$$P(S_i^{(m=1)} < \infty | \tau_i^{(m)} < \infty|) = P_i(\tau_i < \infty).$$

Bew: *Für $k, l \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}
&P(S_i^{(m+1)} = l, \tau_i^{(m)} = k) = \\
&= P(\{\exists! k_1, \ldots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \\
&\qquad \cap \{X_k = i\} \cap \{X_j \neq i \forall j = k+1, \ldots, k+l-1, X_{k+l} = i\}) \\
&= P(X_j \neq i \forall j = k+1, \ldots, k+l-1, X_k = i | \{\exists! k_1, \ldots, k_{m-1} < k : X_{k_j} \\
&\qquad \cap \{X_k = i\}) \cdot P(\{\exists! k_1, \ldots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \cap \{X_k = i\}) \\
&\overset{Lemma\ 5.2}{=} P(X_j \neq i \forall j = k+1, \ldots, k+l-1, X_{k=l} = i | X_k = i) \\
&\qquad \cdot P(\{\exists! k_1, \ldots, k_{m-1} < k : X_{k_j} = i\} \cap \{X_k = i\}) \\
&= P_i(\tau_i = l) \cdot P(\tau_i^{(m)} = k).
\end{aligned}$$

$$\overset{\sum_{k\in\mathbb{N}}}{\Longrightarrow} P(S_i^{(m+1)} = l, \tau_i^{(m)} < \infty) = P_i(\tau_i = l) \cdot P(\tau_i^{(m)} < \infty).$$

$$\Longrightarrow P(S_i^{(m+1)} = l | \tau_i^{(m)} < \infty) = P_i(\tau_i = l) \overset{\sum_{l\in\mathbb{N}}}{\Longrightarrow} \textit{Beh.} \qquad \square$$

Definition 5.14 $f_i := P_i(\tau_i < \infty)$
Wiederkehrwahrscheinlichkeit des Zustands $i \in E$.

Definition 5.15 *Für* $i \in \mathbb{E}$ *heißt* $V_i := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)$ **Aufenthaltszahl des Zustands** i.

Satz 5.8 *Unter* P_i *ist* V_i *geometrisch verteilt mit Parameter* $\rho = f_i$.

Bemerkung $Z \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *geometrisch verteilt mit Parameter* $\rho \in [0,1]$

$$:\Longleftrightarrow P(Z = m) = \left\{ \begin{array}{ll} (1-\rho)\rho^{m-1} & \text{für } \rho < 1 \\ 0 & \text{für } \rho = 1 \end{array} \right\}, m \in \mathbb{N}.$$

sowie $P(Z = \infty) = 0$ *für* $\rho < 1$ *bzw.* $P(Z = \infty) = 1$ *für* $\rho = 1$.

$$:\Longleftrightarrow P(Z > m) = \rho^m \text{ für } m \in \mathbb{N}_0.$$

Bew: (v. Satz 5.8)

Zeige $P_i(V_i > m) = f_i^m$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$ *durch Induktion:* $m = 0$*:*
Unter P_i *ist* $X_0 = i$ *f.s., d.h.* $P_i(V_i > 0) = 1 - f_i^0$.
Induktionsschritt $m \rightsquigarrow m+1$*:*
Unter P_i *ist* $\{V_i > m\} = \{V_i \geq m+1\} = \{\tau_i^{(m)} < \infty\}$ *fast sicher, da* $X_0 = i$ *f.s.*

$$\begin{aligned}\Rightarrow P_i(V_i > (m+1)) &= P_i(\tau_i^{(m+1)} < \infty)\\ &= P(S_i^{(m)} < \infty | \tau_i^{(m+1)} < \infty) \cdot P(\tau_i^{(m+1)} < \infty)\\ &\overset{\text{Lemma 5.4}}{=} f_i \cdot P(\tau_i^{(m)} < \infty) \overset{\text{Ind. Beh.}}{=} f_i \cdot f_i^m = f_i^{m+1}.\end{aligned}$$

Korollar 5.1

- $i \in E$ *rekurrent* $\Leftrightarrow \sum_k (p^k)_{ii} = \infty \Leftrightarrow f_i = 1$
- $i \in E$ *transient* $\Leftrightarrow \sum_k (p^k)_{ii} < \infty \Leftrightarrow f_i < 1$.

Insbesondere ist jeder Zustand entweder transient oder rekurrent.

Bew:

$Z := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)$ *unter* P_i *geom. vert. mit Param.* $\rho = f_i$, *d.h.*
$E(Z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E_i(\mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_{ii}^{(k)} < \infty \Leftrightarrow \rho := f_i < 1$
$\Leftrightarrow Z < \infty$ P_i*-f.s* $\Rightarrow P_i(X_k = i$ *für unendl. viele* $k) = 0$ *bzw.*
$E(Z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E_i(\mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_{ii}^{(k)} = \infty \Leftrightarrow \rho := f_i = 1 \Leftrightarrow Z = \infty$ P_i*-f.s* $\Rightarrow P_i(X_k = i$ *für unendl. viele* $k) = 1$.
D.h. falls i *nicht rekurrent* $\Rightarrow \sum (p^k)_{ii} < \infty \Rightarrow i$ *transient.* $\square$

Beispiel – Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$

Definition 5.16 *(Symmetrische) Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$: Markov-Kette auf $E = \mathbb{Z}^d$, mit $p_{ij} = \frac{1}{2^d}$, falls i und j Nachbarpunkte in $\mathbb{Z}^d$.*

Satz 5.9 *Für $d = 1, 2$ ist jeder Zustand $i \in \mathbb{Z}^d$ rekurrent, in $d \geq 3$ ist jeder Zustand transient.*

Bew: (Skizze) *Wegen der Verschiebungsinvarianz von $\mathbb{Z}^d$ reicht es aus, den $i = 0 \in \mathbb{Z}^d$ zu betrachten:*

- *Falls $d = 1$:* $P_{00}^k = \begin{cases} \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{falls } k = 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\overset{\text{Stirling'sche Formel}}{\Longrightarrow} \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \simeq \frac{c}{\sqrt{n}}$ *für $n \to \infty$, d.h*
$\sum_k p_{00}^k \simeq c \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \Rightarrow 0$ *rekurrent.*

- *Falls $d = 2$: Gleichverteilung auf den Eckpunkten des Einheitsquadrates in $\mathbb{Z}^2$ ist die um $\frac{\pi}{4}$-gedrehte Gleichverteilung auf den Diagonalpunkten $\Rightarrow$ Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ entspricht $\frac{\pi}{4}$-Drehung von $\hat{X}_k = \binom{x_k}{y_k}$ mit (x_k) und (y_k) unabh. $\mathbb{Z}$-Irrfahrten.*
$\Rightarrow P(X_k = 0) = P(x_k = 0, y_k = 0) = P(x_k = 0)P(y_k = 0) \simeq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2. \Rightarrow \sum_k p_{00}^k \simeq \sum_n \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow 0$ *rekurrent in $d = 2$.*

- *$d \geq 3$: $p_{00}^k \simeq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^d \Rightarrow \sum_k p_{00}^k \simeq \sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^d < \infty$, falls $d \geq 3$*
$\Rightarrow 0$ *transient für $d \geq 3$.*

Irreduzibilität

Definition 5.17 *Sei (X_k) MK auf E mit Übergangsmatrix p, und $i, j \in E$.*
$\bullet i \rightsquigarrow j :\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}_0 : p_{ij}^l > 0.$
$\bullet i \leftrightarrow j :\Leftrightarrow i \rightsquigarrow j$ *und* $j \rightsquigarrow i$
• *Die durch $\leftrightarrow$ definierten Äquivalenzklassen auf E heißen* **(kommunizierende) Klassen.**
• *Eine Menge $K \subset E$ heißt* **abgeschlossen**, *falls $K \not\rightsquigarrow E \setminus K$, d.h. $i \not\rightsquigarrow j$ für alle $i \in K, \in E \setminus K$*

Bemerkung *Für $K \subset E$ abgeschlossen ist $(p_{|K}) = (p_{ij})_{i,j \in K}$ wieder eine stochastische Matrix.*

Definition 5.18 (X_k) *heißt* **irreduzibel**, *falls $i \leftrightarrow j \, \forall \, i, j \in E$.*

Satz 5.10 *Falls $i \leftrightarrow j$ ist i rekurrent genau dann, wenn j transient ist.*

Bew: *Folgt für $p_{ji}^{l} > 0$ und $p_{ij}^{l'} > 0$ aus aus $p_{jj}^{l+k+l'} \geq p_{ji}^{l} p_{ii}^{k} p_{ij}^{l'} \, \forall k$.*

Bemerkung $\Rightarrow$ *Transienz/Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft.*

Satz 5.11 *Jede rekurrente Klasse ist geschlossen.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Satz 5.12 *Jede endl. geschlossene Klasse ist rekurrent.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Korollar 5.2 *Jede irreduzible Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum ist rekurrent.*

Invariante Maße und Verteilungen

Definition 5.19 *Sei p eine stoch. Matrix auf E. Dann heißt $\lambda_i \geq 0, i \in E$ mit*

$$\lambda_j = \sum_{i \in E} \lambda_i p_{ij} \quad \forall j \in E$$

P-**invariantes Maß**,
bzw. P-**invariante Verteilung**, *falls zudem* $\sum_i \lambda_i < \infty$.

Bemerkung *Falls λ_i inv. Verteilung $\Rightarrow$ OBdA $\sum_i \lambda_i = 1$, denn sonst mit $Z = \sum_{i \in E} \lambda_i$ ist $\tilde{\lambda}_i := \frac{1}{Z}\lambda_i$ auch invariant mit $\sum \tilde{\lambda}_i = 1$.*

Satz 5.13 *Falls λ eine inv. Verteilung für p und (X_k) eine (λ, P)-MK, so gilt $P(X_k = i) = \lambda_i$ forall $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in E$.*

Bew: *Für $k = 1 \Leftrightarrow$ Def. von Invarianz. Für $k \geq 2$ durch Induktion.*

Lemma 5.5 *Falls μ und ν invariante Maße mit $\mu_i \geq \nu_i \forall i \in E$ und $\mu_{i_0} = \nu_{i_0}$ für ein $i_0 \in E$, so ist $\nu = \mu$, falls P irreduzibel.*

Bew: $\eta := \mu - \nu \geq 0$ *invariant*
$\Rightarrow 0 = \eta_{i_0} = \sum_j \eta_j p^k_{ji_0} \geq \eta_i p^k_{ii_0} \Rightarrow \eta_i = 0$, *falls* $p^k_{ii_0} > 0$.

Inv. Maß – Existenz bei Rekurrenz

Satz 5.14 *Sei (X_k) eine homog. MK auf E und $k \in E$ rekurrent, dann ist $\gamma_i^{(k)} := \gamma_i := E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_i(X_l)]$, $i \in E$ ein inv. Maß (mit $\gamma_k = 1$).*

Bew: *Erinnerung* $\tau_k := \inf\{l \in \mathbb{N} \,|\, X_l = k\}$.

$$
\begin{aligned}
\gamma_i &= E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_i(X_l)] = \sum_{l\geq 1} P_k(X_l = i, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{l\geq 1}\sum_{j\in E} P_k(X_l = i, X_{l-1} = j, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{l\geq 1}\sum_{j\in E} P_k(X_l = i, X_{l-1} = j, X_1 \neq k, \ldots, X_{l-1} \neq k) \\
&\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} \sum_{l\geq 1}\sum_{j\in E} P_k(X_l = i | X_{l-1} = j) P_k(X_{l-1} = j, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{j\in E} p_{ji} E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_{\{j\}}(X_l)] = \sum_{j\in E} p_{ji}\gamma_j.
\end{aligned}
$$
□

Korollar 5.3 *Falls P irreduzibel und $k \in E$ rekurrent, so gilt $0 < \gamma_i < \infty$.*

Bew: $\gamma_i = \sum_{j\in E} p_{ji}^m \gamma_j \geq p_{jk}^{(m)} 1 > 0$ *und* $1 = \gamma_k = \sum_{j\in E} p_{jk}^{(l)}\gamma_j > p_{ji}^{(l)}\gamma_i$.

Bsp. 5.5 ('Fluchtkette')

$E = \mathbb{N}_0$, $p_{i,i+1} = p_i$ fur $i \geq 1$, $p_{i,0} = q_i = 1 - p_i$, wobei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ so gewählt, dass $p := \prod_{i=0}^{\infty} p_i > 0$.
$\pi_{i \geq 0}$ invariant $\Leftrightarrow \pi_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \pi_i p_i$ und $\pi_i = p_{i-1}\pi_i$ für $i \geq 1$.
$\Rightarrow \pi_i = \prod_{l=0}^{i-1} p_l \pi_0$
$\Rightarrow \pi_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (1 - p_i) \prod_{l=0}^{i-1} p_l \pi_0 = (1-p)\pi_0$. $\Rightarrow \pi_0 = 0$,
d.h. es ex. nur die triviale Lösung $\pi_i = 0 \, \forall \, i \in E$.

Bemerkung *Kein Widerspruch zu Satz 5.14, da $(X_k)_k$ zwar irreduzibel aber nicht rekurrent (s. Übung).*

Inv. Maß: Eindeutigkeit bei Irreduzibilität

Lemma 5.6 *Falls P irreduzibel und λ inv. Maß mit $\lambda_k = 1$, so gilt $\lambda \geq \gamma^{(k)}$.*

Bew: *Für $k = j$ $\lambda_k = 1 \geq \gamma_k = f_k = P_k(\tau_k < \infty)$.*
Für $k \neq j$:

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i_1 \in E} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} = \sum_{i_1 \neq k} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_1 \neq k} \sum_{i_2 \neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j} + \sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_1 \neq k, \dots, i_n \neq k} \lambda_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_1 j} \\
&\qquad\qquad + p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + \cdots + \sum_{i_1, \dots, i_n} p_{k i_{n-1}} \dots p_{i_2 i_1} p_{i_1 j} \\
&\overset{\text{für } j \neq k}{\geq} P_k(X_1 = j) + P_k(X_2 = j, \tau_k \geq 2) + \cdots + P_k(X_n = j, \tau_k \geq n) \\
&\overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \gamma_j^{(k)}.
\end{aligned}$$

Korollar 5.4 *Falls P irreduzibel und rekurrent, so ist $\gamma := \gamma^{(k)}$ das einzige inv. Maß mit $\gamma_k = 1$.*

Bew: *Folgt aus Lemma 5.5 und Lemma 5.6.*

Positive Rekurrenz und Nullrekurrenz – Existenz einer invarianten Verteilung

Definition 5.20 *Ein Zustand $k \in E$ heißt* **positiv rekurrent**, *falls $E_k(\tau_k) < \infty$. Ein rekurrenter Zustand mit $E_k(\tau_k) = \infty$ heißt* **null-rekurrent**.

Bemerkung *$E_k(\tau_k) < 0 \Rightarrow \tau_k < \infty$ P_k-f.s., d.h. k dann auch rekurrent.*

Satz 5.15 *Sei P eine irreduzible Übergangsmatrix auf E, dann sind äquivalent*
i) k positiv rekurrent für alle $k \in E$.
ii) k positiv rekurrent für ein $k \in E$.
ii) Es ex. eine invariante Verteilung π auf E.

Ferner ist π dann eindeutig gegeben durch $\pi_i = \frac{1}{E_i(\tau_i)}$, $i \in E$.

Bsp. 5.6 *Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ für $d \leq 2$ ist null-rekurrent, denn eind. inv. Maß gegeben durch $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_i = \infty$.*

Beweis Satz 5.15

i $\Rightarrow$ ii: klar. ii $\Rightarrow$ iii: Für k pos. rekurrent ist

$$\begin{aligned}\sum_{i\in E}\gamma_i^{(k)} &= \sum_i E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k}\mathbb{1}_{\{i\}}(X_l)] \\ &= \sum_{l=1}^{\tau_k} E_k(\mathbb{1}) = E_k(\tau_k) < \infty,\end{aligned}$$

d.h. $\gamma_i^{(k)}, i \in E$, ist eine inv. Verteilung.
iii $\Rightarrow$ i: $\sum_{j\in E}\pi_j = 1 \Rightarrow \exists j \in E$ mit $\pi_j > 0$.
Für $k \in E$ sei $l \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{jk}^{(l)} > 0$, dann
$\pi_k = \sum_{j\in E} p_{jk}\pi_j > 0$.
Setze $\lambda_i := \lambda_i^{(k)} := \frac{\pi_i}{\pi_k}$.
$\Rightarrow \lambda$ invariant und $\lambda_k = 1 \overset{\text{Lemma 5.6}}{\Longrightarrow} \lambda_i^{(k)} \geq \gamma_i^{(k)}\, \forall i \in E$
$\Rightarrow E_k(\tau_k) = \sum_{i\in E}\gamma_i^{(k)} \leq \frac{1}{\pi_k}\sum_{i\in E}\pi_i = \frac{1}{\pi_k}$.
Zusatzbehauptung:
$\overset{\text{Kor. 5.4}}{\Longrightarrow} \gamma_i^{(k)} = \frac{\pi_i}{\pi_k} \overset{\sum_{i\in E}\cdots}{\Longrightarrow} E_k(\tau_k) = \frac{1}{\pi_k}$. $\square$

Langzeitverhalten (I) – Ergodensatz

Satz 5.16 *i) Sei $(X_k)_k$ irreduzible homog. MK auf E, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{1}_k(X_l) = \pi_k = \frac{1}{E_k(\tau_k)} \text{ fast sicher.}$$

ii) Falls $(X_k)_k$ zudem pos. rekurrent und $f : E \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} f(X_l) = \sum_{i\in E} \pi_k f_k \text{ fast sicher.}$$

Bemerkung

- *Aussage: "Zeitmittel" = "Raummittel" bzw.*
- $\hat{\pi}_k^n := \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)$ **emp. Aufenthaltsmaß** $\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \pi$ *f.s.*
- (X_k) *mit der Eigenschaft wie in ii) heißt* **ergodisch**.

Lemma 5.7 *Sei (X_k) homog. MK auf E, $k \in E$, dann sind die Exkursionen $S_i^{(k)} := \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)}$, $i \geq 2$, u.i.v. mit $E(S_i^k) = E_k(\tau_k)$.*

Bew: *Einfache Konsequenz der Markov-Eigenschaft (s. Übungen).*

Beweis Satz 5.16

i): Falls k transient $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_l) = 0 = \frac{1}{E_k(\tau_k)}$.

Falls k rekurrent:

$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_l) = \lim_n \frac{1}{n} V_n^{(k)};\ V_n^{(k)} := \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)$

$$\overset{\text{Def. von } \tau_i^{(k)}}{\Longrightarrow} \quad \tau^{(k)}_{V_n^{(k)}} \leq n \text{ und } \tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1} \geq n+1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n}\frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1}} \leq \frac{V_n^{(k)}}{n} \leq \frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}}}$$

$$\overset{\text{SGZ}}{\Longrightarrow} \frac{\tau_n^{(k)}}{n} = \frac{\sum_{l=i}^{n} S_i^{(k)}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_k(\tau_k) \text{ f.s.}$$

Ferner $V_n^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ f.s, da k rekurrent

$$\Longrightarrow \frac{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}}}{V_n^{(k)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_k(\tau_k) \text{ f.s. bzw. } \frac{n+1}{n}\frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_k(\tau_k) \text{ f.s.}$$

ii): Folgt aus i) falls $f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathbb{1}_{\{k_j\}}$.

Allgem. f: Wahle $A \subset E$ endlich, s.d. $\mu(A) \geq 1-\epsilon$, $\hat{f} := \mathbb{1}_A f$.

$|\langle f, \hat{\pi}_n\rangle - \langle f, \pi\rangle| \leq |\langle f-\hat{f}, \hat{\pi}_n\rangle| + |\langle \hat{f}, \hat{\pi}_n\rangle - \hat{f}, \pi\rangle| + |\langle f - \hat{f}, \pi\rangle|$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt aus $|\langle \hat{f}, \pi\rangle - \langle f, \pi\rangle| \leq \epsilon \|f\|_\infty$ und

$|\langle f - \hat{f}, \hat{\pi}_n\rangle| \leq \|f\|_\infty (1-\hat{\pi}_n(A)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty(1-\pi(A)) \leq \epsilon\|f\|_\infty$.

Langzeitverhalten (II) - Mischen

Definition 5.21 • *Für (X_k) homog. MK auf E mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$, $k \in E$ heißt*

$$d_k := ggT\{n \mid p_k^{(n)} k > 0\}$$

Periode vom Zustand k.

• *Falls $d_k = 1$ für alle $k \in E$ heißt (X_k)* **aperiodisch**.

Bemerkung *"Periode" ist eine Klasseneigenschaft, da $d_k = d_{k'}$, falls $k \leftrightarrow k'$.*

Satz 5.17 *Sei P irreduzibel aperiodisch auf E und mit inv. Verteilung π. Dann gilt für jede (λ, P)-MK und (X_k) eine auf E mit bel. Startverteilung λ*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \pi_k \quad \forall k \in E. \qquad (*)$$

Bemerkung *Eine MK (X_k) mit der Eigenschaft $(*)$ heißt* **mischend**.

Bsp. 5.7 *$E = \{1, 2\}$, $p_{1,2} = p_{2,1} = 1 \Rightarrow P$ irreduzibel, pos. rekurrent, periodisch mit Periode 2. Falls z.B. $\lambda_1 := 1, \lambda_2 := 0$*
$\Rightarrow P(X_n = 1) = 0$, falls n ungerade bzw. $= 1$, falls n gerade.

Beweis von Satz 5.17 – Vorbereitungen

Lemma 5.8 *Sei $M \subset \mathbb{N}$ abgeschlossen unter Addition und mit $ggT(M) = 1$, dann ex. $m \in \mathbb{N}$, s.d. $\mathbb{N}_{\geq m} \subset M$.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Korollar 5.5 *Falls P aperiodisch irreduzibel, so ex für $i, j \in \mathbb{N}$ ein $m = m(i, j)$, s.d. $p_{ij}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq m$.*

Bew: *Sei $p_{ij}^{(l)}$ und n, s.d. $p_{jj}^{(k)} > 0$ für $k \geq n$, dann gilt für $m \geq n + l$ $p_{ij}^{(m)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{ij}^{(m-l)} > 0$.*

Lemma 5.9 *1) Seien $(X_k)_k$ und $(Y_k)_k$ zwei unabhängige (λ, P)-MK auf E, dann ist $W_k := (X_k, Y_k)$ eine $(\lambda \otimes \lambda', Q)$-MK auf $E \times E$, mit $Q_{ii',jj'} = P^{\otimes 2}_{ii',jj'} = P_{ij}P_{i'j'}$.*
2) Q ist irreduzibel und pos. rekurrent, falls P pos. rekurrent, irreduzibel und aperiodisch.

Bew: • $P[W_{n+1} = (j,j')|W_n = (i,i')]$
$\overset{\text{Unabh.}}{=} P(X_{n+1} = j|X_n = i)\, P(Y_{n+1} = j'|X_n = i') = p_{ij}p_{i'j'}$.
Analog $P[W = (i,i')] = \lambda_i \lambda'_{i'}$
• *Für* (i,i') *und* (j,j')
$\overset{\text{Lemma 5.5}}{\Longrightarrow} Q^{(M)}_{(i,i'),(j,j')} > 0$ *für* $M := \max[m(i,j), m(i',j')]$.
• *Falls* π *inv. Verteilung für* P
$\Rightarrow \pi \otimes \pi$ *invariante Verteilung auf* $E \times E$ *für* $Q := P \otimes P$
$\Rightarrow Q$ *pos. rekurrent.*

Beweis von Satz 5.17

• Sei $W_k := (X_k, Y_k)$ Paar von zwei unabh. P-MK auf E mit Startverteilungen λ bzw. π
$\Rightarrow (W_k)_k$ irreduzibel und (pos.) rekurrent auf $E \times E$
Sei $e \in E$ bel. und $T := \inf\{k \geq 0 \,|\, W_k = (e,e)\}$.
• Wähle $e \in E$ bel. und $T := \inf\{k \geq 0 \,|\, W_k = (b,b)\}$.
$\Rightarrow$ Beh.: $T < \infty$ fast sicher.

Denn andernfalls ex. wegen
$P(T = \infty) = \sum_{(i,j) \in E \times E} \lambda_i \lambda_j P_{(i,j)}(T = \infty) > 0$ ein
$(i,j) \in E \times E$, s.d. $P_{(i,j)}(T = \infty) > 0$ und dann

$$\begin{aligned} P_{(e,e)}(\tau_{(e,e)} = \infty) &\geq P_{(e,e)}(T = \infty) \\ &\geq Q^{(l)}_{(i,j),(e,e)} P_{(i,j)}(T = \infty) > 0, \end{aligned}$$

falls $Q^{(l)}_{(i,j),(b,b)} > 0$.

• Sei $Z_k := \begin{cases} X_k & \text{falls } k < T \\ Y_k & \text{falls } k \geq T \end{cases} \Rightarrow (Z_k)_k$ ist (λ, P)-MK

• $|P(X_n = k) - \pi_k| = |P(X_n = k) - P(Y_n = k)|$
$= |P(X_n = k, n \leq T) - P(Y_n = k, n \leq T)|$
$\leq P(n \leq T) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ $\square$