Bew. von Lindeberg-Feller: i) $\Rightarrow$ ii)

- $\overset{\text{Tschebyshev}}{\Longrightarrow} \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) \leq \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} \frac{\sigma_{i,n}}{\epsilon^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
- $\overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow} \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} E[\min(2, |t X_i^n|)]$

$$\leq 2 \sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) + \epsilon|t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ $\log \varphi_{n,i}(t)$ definiert für $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$, falls n groß.

- $E(X_i^{(n)}) = 0 \overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow} |\varphi_{n,i}(t) - 1| \leq C|t|^2\sigma_{n,i}^2.$

$$\Rightarrow |\log(\varphi_{n,i}(t)) - (\varphi_{n,i}(t) - 1)|$$
$$= |\log(1 - (\varphi_{n,i}(t) - 1)) - (\varphi_{n,i}(t) - 1)|$$
$$\overset{\text{Taylor-Entw. von } z \to \log(z) \text{ in } z=1}{\leq} C|(\varphi_{n,i}(t) - 1)|^2 \leq Ct^4\sigma_{n,i}^4$$

- $|\sum_{i=1}^{m_n} \log \varphi_{n,i}(t) - \sum_{i=1}^{m_n} (\varphi_{n,i}(t) - 1)| \leq C \sum_{i=1}^{m_n} t^4\sigma_{n,i}^4$

$$\leq Ct^4 \Big(\sup_{i\in\{1,\cdots,m_n\}} \sigma_{n,i}^2 \Big) \cdot \sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- $\log \varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \log \varphi_{n,i}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}$ nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_n} (\varphi_{n,i}(t) - 1) \overset{n\to\infty}{=\!=\!\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}.$$

Bew. von Lindeberg-Feller: i) $\Rightarrow$ ii) (Forts.)

- $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_n} \mathrm{Re}(\varphi_{n,i}(t) - 1) = \sum_{i=1}^{m_n} (\mathrm{Re}(\varphi_{n,i}(t)) - 1)$
$= \sum_{i=1}^{m_n} (E[\cos(tX_i^{(n)})] - 1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(-\frac{t^2}{2}) = -\frac{t^2}{2}$
- Wegen $0 \leq 1 - \cos(\theta) \leq -\frac{\theta^2}{2}$, für $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon] \\
&\quad = \limsup_{n\to\infty} \left(\sigma_n^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| \leq \epsilon] \right) \\
&\quad = \limsup_{n\to\infty} 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| \leq \epsilon] \\
&\quad \leq \limsup_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[1 - \cos(tX_i^{(n)}); |X_i^{(n)}| \leq \epsilon] \\
&\quad = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} E[1 - \cos(tX_i^{(n)}); |X_i^{(n)}| > \epsilon] \\
&\quad \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} P(|X_i^{(n)}| > \epsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\epsilon^2 t^2} \textstyle\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = \frac{2}{\epsilon^2 t^2}.
\end{aligned}$$

Mit $t \to \infty$ folgt die Lindeberg-Bedingung. $\square$

Satz von Berry-Esseén

Satz 3.10 *Für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ mit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabh. ident. verteilt mit $E(X_1) = 0$, $V(X_1) = 1$ und $E(|X|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$ ex. $C > 0$, $\delta > 0$, s.d.*

$$\sup_{\{a\in\mathbb{R}\}} |P(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq a) - \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty e^{-t^2/2} dt| \leq C n^{-\delta}.$$

Bemerkung

- *Quantitative Fehlerabschätzung im Zentralen Grenzwertsatz*
- $\delta = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$ *(siehe Beweis unten).*

Berry-Esseén: Vorbereitungen

Lemma 3.7 *Falls* $f \in C(\mathbb{R})$, $f \geq 0$ *und* $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx < \infty$ *gilt*
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi_f(y)dy$$
mit $\varphi_f(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$.

Bew: *O.B.d.A.* $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
$\rightsquigarrow$ *Def. W-Maß* $\eta(]a,b]) := \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \eta(\{a\}) = 0 \, \forall\, a \in \mathbb{R}$
Beh. folgt durch Ableiten der Inversionsformel (Satz 3.6) nach b.

Bemerkung
- $\varphi_\eta(t) = \varphi_f(t)$ *heißt* **'Fourier-Transformierte' von** f**.**
- $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi_f(y)dy$
$= \overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \overline{\varphi_f(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi_f(-y)dy$

Lemma 3.8 *Für* $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < h < \frac{b-a}{2}$ *und* $f_{a,b,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_{a,b,h}(x) =$
$\mathbb{1}_{[a+h,b-h]}(x) + \mathbb{1}_{[a-h,a+h[}(x)\frac{x-a+h}{2} + \mathbb{1}_{]b-h,b+h]}(1 - \frac{x-b+h}{2h})$ *gilt*
$$f_{a,b,h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy} dy.$$

Bew: $\varphi_{f_{a,b,h}}(-y) = \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy}$ *(Nachrechnen).*

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Lemma 3.9 (Riemann-Lebesgue) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Bew: *Für $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}$ ist $|\int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx| = \frac{1}{n}|e^{inb} - e^{ina}| \le \frac{2}{n}$.*
Hieraus für $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ durch Approximation (s. Übung).

Lemma 3.10 *Für μ, ν W-Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,h}(x) d(\mu - \eta)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [\varphi_\mu(y) + \varphi_\nu(y)] \frac{e^{-iay}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy} dy.$$

mit $f_{a,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b,h}(x) = \mathbb{1}_{[a+h,\infty)}(x) + \mathbb{1}_{[a-h,a+h[}(x)\frac{x-a+h}{2}$.

Bew: *Lemma 3.8 und Fubini ergeben*

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,b,h}(x)(\mu(dx) - \nu(dx))$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)] \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy} dy$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ ist $|\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)| \le C|y|$ nahe bei 0, somit $y \to [\varphi_\mu(y) - \varphi_\eta(y)] \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \frac{\sin(hy)}{hy} \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.
Behauptung ergibt sich aus Riemann-Lebesgue mit $b \to \infty$.

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Satz 3.11 (Esseén-Ungl.) *Für μ, ν W-Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\eta(dx) = 0$ und falls $\exists\, C > 0$, s.d. $\mu([a,b]) \leq C|b-a| \,\forall\, a < b$, dann*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} |\mu([a,\infty)) - \nu([a,\infty))| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\mu(y) - \varphi_\nu(y)| \frac{\sin(hy)}{hy^2} dy + 2hC$$

Bew:
- $\mathbb{1}_{[a,\infty)} \leq f_{a-h,h} \leq \mathbb{1}_{[a-h,\infty)} \Rightarrow$
$\eta([a,\infty)) - \mu([a,\infty)) \leq \int_{\mathbb{R}} f_{a-h,h} d\eta - (\int_{\mathbb{R}} f_{a-h,h} d\mu - 2hC)$
- $\mathbb{1}_{[a,\infty)} \geq f_{a+h,h} \geq \mathbb{1}_{[a+2h,\infty)} \Rightarrow$
$\mu([a,\infty)) - \eta([a,\infty)) \leq (\int_{\mathbb{R}} f_{a+h,h} d\mu + 2hC) - \int_{\mathbb{R}} f_{a+h,h} d\nu$

$$\Rightarrow \sup_a |\eta([a,\infty)) - \mu([a,\infty))| \leq \sup_a \left| \int_{\mathbb{R}} f_{a,h}(x) d(\mu-\eta)(x)\right| + 2hC$$

$$\overset{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sup_a \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\lambda(x) - (\varphi_\mu(x)| \frac{\sin(hy)}{hy^2} dx + 2hC. \qquad \square$$

Berry-Esseén: Vorbereitungen (Forts.)

Lemma 3.11 *Sei X ZV mit $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ und $E(|X|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$, dann*

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + r(t) \text{ mit } \limsup_{t\to 0} |r(t)|/|t|^{2+\alpha} < \infty.$$

Bew: *Folgt aus Lemma 3.5 für $n = 2$. (s. Übung).*

Bemerkung *Alternative Formulierung:* $\varphi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(|t|^{2+\alpha})$.

Korollar 3.3 *Falls $(X_n)_n$ unabh. Folge von ident. verteilten ZV'en mit $E(X_1) = 0$, $V(X_1) = 1$ und $E(|X_1|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$, so ex. $C > 0$, s.d. für $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$*

$$|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - \exp(-t^2/2)| \leq \frac{|t|^{2+\alpha}}{n^\alpha} \text{ falls } |t| \leq n^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Bew: $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})^n = \exp(n \log \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n}))$.
Beh. folgt aus Lemma 3.11 mit Taylor-Entw. für exp *und* log.

Berry-Esseén: Beweis

Esseén-Ungl. für $\eta = \eta_n =$ Verteilung von $S_n/\sqrt{n}$ und $\mu = \nu_{0,1}$

$$\Rightarrow \sup_{a\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) - \nu_{0,1}([a,\infty))\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \frac{|\sin(ht)|}{ht^2} dt + Ch$$

mit $\theta := \frac{\alpha}{2+\alpha}$

$$\leq \frac{C}{h}\int_{|t|\leq n^\theta} \dots dt + \frac{C}{h}\int_{|t|\geq n^\theta} \dots dt + Ch$$

$$\overset{\text{Kor. 3.3}}{\leq} \frac{C}{h}\int_{|t|\leq n^\theta} \frac{|t|^\alpha}{n^\alpha} dt + \frac{C}{h}\int_{|t|\geq n^\theta} \frac{1}{t^2} dt + Ch$$

$$\leq \frac{C}{h}\left(n^{(\alpha+1)\theta-\alpha} + n^{-\theta}\right) = \frac{C}{hn^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}} + Ch$$

Die Behauptung folgt durch Wahl von $h = h_n = n^{-\frac{\alpha}{2(2+\alpha)}}$ $\square$