Anwendung vom ZGS

Korollar 3.1 *Falls $(X_n)_n$ Folge unabh. id. vert. reeller ZV'en mit $m = E(X_1)$ und $\sigma^2 = V(X_1)$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\,m}{\sqrt{n}\sigma} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du =: \Phi(t).$$

Bew: *Folgt aus ZGS und Satz 3.3, da $t \to F(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$ stetig.*

Bemerkung $t \to \Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$ **'Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung'**.

Bsp. 3.1 *X_i unabh. Bernoulli-verteilt mit Parameter p*
$\Rightarrow E(X_1) = p$, $V(X_1) = p(1-p)$.
($\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i$ ist $B(n,p)$ binomialverteilt.)
$\Rightarrow P[\sum_{i=1}^n X_i \leq s]$
$= P[(\sum_{i=1}^n X_i - np)/\sqrt{np(1-p)} \leq (s-np)/\sqrt{np(1-p)}]$
$\simeq \Phi[(s-np)/\sqrt{np(1-p)}]$, *falls n groß.*

Charakteristische Funktionen

Definition 3.2 *Sei $X \sim \mu$ eine R^d-werige ZV, dann heißt $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$,*

$$\varphi_X(\xi) = E(e^{i\langle \xi, X\rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\mu(dx)$$

charakteristische Funktion von X (bzw. von μ).

Bemerkung $\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\mu(dx) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle \xi, x\rangle)\mu(dx) + i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle \xi, x\rangle)\mu(dx) \in \mathbb{C}$,
mit $x \to \cos(\langle \xi, x\rangle)$, $x \to \sin(\langle \xi, x\rangle) \in C_b(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_X(.)$ *wohldef.*

Satz 3.5 *Eigenschaften von φ_X:*

1. $|\varphi_X(\xi)| \leq 1$ *und* $\varphi_X(0) = 1$
2. $\varphi_X(.)$ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}^d$*:*
   $|\varphi_X(\xi + \eta) - \varphi_X(\xi)| \leq \int |e^{i\langle \xi+\eta, x\rangle} - e^{i\langle \xi, x\rangle}|\mu(dx)$
   $= \int |e^{i\langle \eta, x\rangle} - 1|\mu(dx) \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\longrightarrow} 0$ *für* $\eta \to 0$.
3. $\varphi_{aX+b}(\xi) = e^{i\langle b, \xi\rangle}\varphi_X(a\xi)$, $\varphi_{-X}(\xi) = \overline{\varphi_X(\xi)}$,
4. *Für X und Y unabhängig ist* $\varphi_{X+Y}(\xi) = \varphi_X(\xi) \cdot \varphi_Y(\xi)$.

Bsp. 3.2 $\varphi_{\nu_{m,v}}(t) = e^{itm - \frac{1}{2}vt^2}$

Inversionsformel

Satz 3.6 *Falls $\varphi = \varphi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für μ W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so gilt*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt = \mu((a,b)) + \frac{\mu(\{a\})+\mu(\{b\})}{2}.$$

Bew: • $\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right| = \left|\int_a^b e^{ist} ds\right| \leq |a-b|$.

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{its}\mu(ds)dt$$

$$\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(s-a)}-e^{it(s-b)}}{it} dt\mu(ds)$$

$$\overset{t\,\to\,\cos(ct)\ ungerade}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(s-a) - \sin t(s-b)}{t} dt\mu(ds)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [u(T,s-a) - u(T,s-b)]\,\mu(ds)$$

$$mit\ U(T,z) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(tz)}{t} dt$$

Bew. (Forts.)

- $U(T,z) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin(tz)}{t} dt = 2\int_0^{zT} \frac{\sin t}{t} dt$

$$\xrightarrow{T\to\infty} 2\,\mathrm{sign}(z) \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \mathrm{sign}(z)\pi,$$

mit $\mathrm{sign}(z) := \mathbb{1}_{z>0} - \mathbb{1}_{z<0}$.

- $\exists\, C > 0 : |U(T,z)| \leq C\, \forall T, z$

$$\overset{\text{Dom. Konv.}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} [\mathrm{sign}(s-a) - \mathrm{sign}(s-b)] \mu(ds)$$

$$= \frac{1}{2}[\mu(\mathbb{R}_{>a}) - \mu(\mathbb{R}_{<a}) - (\mu(\mathbb{R}_{>b}) - \mu(\mathbb{R}_{<b}))]$$

$$= \frac{1}{2}[\mu(]a,b]) + \mu([a,b[)]$$

$$= \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}))$$

Korollar 3.2 (Eindeutigkeitssatz) *Ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist duch $\varphi_\mu(.)$ eindeutig bestimmt.*

Bew: *Für $F = F_\mu$ stetig in a,b $\Rightarrow F(b) - F(a) = \mu(]a,b[) \xrightarrow{a\to-\infty} F(b)$.*

$\overset{\text{Satz 3.6}}{\Longrightarrow} F_\mu(x)$ durch φ_μ festgelegt falls in x stet. $\overset{F_\mu \text{ rechtsst.}}{\Longrightarrow}$ in $x \in \mathbb{R}$.

Levý'scher Stetigkeitssatz

Satz 3.7 *Es gilt* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *genau dann wenn* $\varphi_{\mu_n}(t) \to \varphi_\mu(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

Bew: *"*$\Rightarrow$*": Klar, da* $x \to e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx) \in C_b(\mathbb{R}) + i\, C_b(\mathbb{R})$.
"$\Leftarrow$*" Folgt aus Satz 3.8 unten.*

Satz 3.8 *Sei* μ_n *eine Folge von Borel'schen W-Maßen auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\varphi_{\mu_n}(t) \to: \varphi(t)$ *für alle* t *für eine Folge von Borel'schen W-Maßen auf* $\mathbb{R}$ *und* $\varphi(.)$ *stetig in* 0*, so gilt* $\varphi = \varphi_\mu$ *für ein Borel'sches W-Maß* μ *auf* $\mathbb{R}$ *und* $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Lemma 3.2 *Sei (F_n) Folge von Funktionen mit $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ rechsttet. nichtfallend. Dann ex. Teilfolge n' und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, rechtsstt. nichtfallend s.d. $F_{n'}(t) \to F(t)$, falls F in t stet.*

Bew: (Idee) $(F_n(q))_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1] \; \forall\, q \in \mathbb{Q} \overset{Diagonalfolge}{\Longrightarrow}$ *Ex. Teilfolge n', s.d* $H(q) := \lim_{n'} F_{n'}(q)$ *ex.* $\forall\, q \in \mathbb{Q}$. *Setze* $F(t) := \lim_{\mathbb{Q}\ni q \searrow t} H(q)$.

Lemma 3.3 *Für $\varphi(.) = \varphi_\mu(.)$ und $F = F_\mu$ und $T > 0$*

$$0 \leq [1 - F(\tfrac{2}{T}) + F(-\tfrac{2}{T})] \leq 2[1 - \tfrac{1}{2T} \textstyle\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt]$$

Bew:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt \overset{Fubini}{=} \int_R \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{itx} dt\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(Tx)}{Tx}\mu(dx)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(Tx)}{Tx}\right| \mu(dx) \leq \mu(\{|x| < l\}) + \frac{1}{Tl}\mu(\{|x| \geq l\})$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt \geq \mu(\{|x| \geq l\}) - \frac{1}{Tl}\mu(\{|x| \geq l\})$$

$$= (1 - \frac{1}{Tl})\mu(\{|x| \geq l\}) \geq (1 - \frac{1}{Tl})[F(-l) + 1 - F(l)]$$

Beh. folgt für $l := \frac{2}{T}$.

Bew: (Satz 3.8) *Sei n' Teilfolge und F gemäß Lemma 3.2, so dass*

$$F_{n'}(t) \to F, \text{ falls } F \text{ stet. in } t.$$

Sei T so gewählt, dass F stet. in $\frac{2}{T}$ und in $-\frac{2}{T}$.

$$\overset{\text{Lemma 3.3}}{\Longrightarrow} 0 \leq [1 - F_{\mu_{n'}}(\frac{2}{T}) + F(-\frac{2}{T})] \leq 2[1 - \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} \varphi_{\mu_{n'}}(t)dt]$$

$$\overset{n \longrightarrow \infty}{\Longrightarrow} 0 \leq [1 - F(\frac{2}{T}) + F(-\frac{2}{T})] \leq 2[1 - \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)dt]$$

$$\overset{T \longrightarrow 0}{\Longrightarrow} 0 \leq [1 - F(\infty) + F(-\infty)] \overset{\phi \text{ stetig in } 0}{\leq} 2[1 - \phi(0)] = 0$$

$$\Rightarrow F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$\Rightarrow F = F_\mu \text{ für ein W-Maß } \mu.$$

$$\Rightarrow \mu_{n'} \Rightarrow \mu$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_\mu$$

D.h. μ durch φ eind. bestimmt, und jede Teilfolge $\mu_{n'}$ enthält eine Teilfolge n'', s.d. $\mu_{n''} \Rightarrow \mu$.

$\Longrightarrow \mu_n \Rightarrow \mu$ für die gesamte Folge μ_n. $\square$

Satz von Lindeberg-Feller

Satz 3.9 *Es sei* $(X^{(n)})_{i=1,\dots,m_n}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *eine Doppelfolge von reellen ZV'en, s.d.* $\{X_1^{(n)}, \dots, X_{m_n}^{(n)}\}$ *unabh. für alle* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\sum_{i=1}^{m_n} E(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{ und } \sum_{i=1}^{m_n} V(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2.$$

Dann sind äquivalent:

i) $X_n := \sum_{i=1}^{m_n} X_i^{(n)} \Rightarrow X \sim \nu_{\mu,\sigma^2}$ *und* $\sup_{i\in\{1,\dots,n_m\}} V(X_i^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

ii) Für alle $\epsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)}))^2; |X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)})| > \epsilon] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Bemerkung *Die Eigenschaft ii) heißt* **Lindeberg-Bedingung***.*

Bew. von Lindeberg-Feller: Vorbereitung

Lemma 3.4 *Sei* $z_1, \ldots, z_n, z'_1, \ldots, z'_n \in \mathbb{C}$ *mit* $|z_i|, |z'_i| \leq 1$, *dann*
$$|\prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n z'_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|$$

Bew: *Duch Induktion nach n (Übung).*

Lemma 3.5 *Für* $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $|e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!}| \leq \min(\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!})$

Bew: *Induktion nach n.*
$n = 0$: $|e^{it} - 1| = |\int_0^t e^{is} ds| \leq |t|$ *und* $|e^{it} - 1| \leq 2 \rightsquigarrow$ *Beh.*
Ind.Schritt folgt aus $e^{it} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(it)^k}{k!} = \int_0^t [e^{is} - \sum_{k=0}^n \frac{(is)^k}{k!}] ds$.

Lemma 3.6 *Für* $X \sim \nu_{m_1, v_1}$, $Y \sim \nu_{m_2, v_2}$ *unabh. ist* $X + Y \sim \nu_{m_1+m_2, v_1+v_2}$

Bew:
$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \\ &= e^{im_1 t - \frac{v_1}{2} t^2} e^{im_2 t - \frac{v_2}{2} t^2} = e^{it(m_1+m_2) - \frac{v_1+v_2}{2} t^2}.\end{aligned}$$

Bew. von Lindeberg-Feller: ii) $\Rightarrow$ i)

- O.b.d.A. $E(X_i^{(n)}) = 0$ und $\sigma^2 = 1$

(Andernfalls argumentiere mit $\hat{X}_i^{(n)} := \frac{X_i^{(n)} - E(X_i^{(n)})}{\sigma}$.)
- Bezeichnungen

$\sigma_{n,i}^2 := V(X_i^{(n)})$, $\sigma_n^2 := \sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2$, $\varphi_{n,i}(t) := \varphi_{X_i^{(n)}}(t)$.
- Sei $\epsilon > 0$

$$\sup_{i \in \{1,\ldots,n_m\}} \sigma_{n,i}^2 \leq \epsilon^2 + \sup_{i \in \{1,\ldots,n_m\}} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon)$$
$$\leq \epsilon^2 + \sum_{i=1}^{m_n} E[(X_i^{(n)})^2; |X_i^{(n)}| > \epsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{i \in \{1,\ldots,n_m\}} \sigma_{n,i}^2 = 0.$$

- Sei $Z_n := \sum_{i=1}^{m_n} Z_i^{(n)}$ mit $Z_i^{(n)} \sim \nu_{0,\sigma_{n,i}}$, $i = 1, \ldots, m_n$ unabh.

Mit $\tilde{\varphi}_{n,i}(t) := \varphi_{Z_i^{(n)}}(t)$.

$\Rightarrow \varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^{m_n} \tilde{\varphi}_{n,i}(t) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, d.h. $Z_n \Rightarrow \nu_{0,1}$.

Bew. von Lindeberg-Feller: ii) $\Rightarrow$ i) (Forts.)

- $$\left|\prod_{i=1}^{m_n}\varphi_{n,i}(t)-\prod_{i=1}^{m_n}\tilde{\varphi}_{n,i}(t)\right| \overset{\text{Lemma 3.4}}{\leq} \sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-\tilde{\varphi}_{n,i}(t)|$$
  $$\leq \sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}^2| + \sum_{i=1}^{m_n}|\tilde{\varphi}_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}^2|$$
  $$=: I + II$$

- Taylor & $\sup_{n,i}\sigma_{n,i}^2 < \infty \Rightarrow \exists C = C_t > 0$ s.d.
  $$II \leq C\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^4 \leq C \sup_{i=i,\ldots,m_n}\sigma_{n,i}^2\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- $\overset{\text{Lemma 3.5}}{\Longrightarrow}$ Mit $K_t := 3|t|^2\min(|t|,1)$
  $$\sum_{i=1}^{m_n}|\varphi_{n,i}(t)-1+\frac{1}{2}t^2\sigma_{n,i}|\leq K_t\sum_{i=1}^{m_n}E[|X_i^{(n)}|^2\min(1,|X_i^n|)]$$
  $$\leq K_t\epsilon\sum_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2 + K_t\sum_{i=1}^{m_n}E[|X_i^{(n)}|^2;|X_t^{(n)}|>\epsilon] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon.$$

Wegen $\epsilon > 0$ beliebig $\lim\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$ Beh. □