Zentraler Grenzwertsatz

Satz 3.1 (ZGS) *Für eine unabh. ident. vert. Folge $(X_n)_n$ von ZV'en mit $E(X_1) = m$ und $V(X_1) = \sigma^2$ gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dass*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \nu_{0,1}.$$

Bemerkung $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *beschreibt* **'Fluktuationen'** *beim GGZ* $\frac{1}{n} S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$.

Bew: (Stein, '72) • *O.B.d.A.* $m = 0$, $\sigma = 1$. *Zu zeigen:* $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$:
$E[f(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ *mit* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
$\rightsquigarrow$ *O.b.d.A.* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$.
• $h(x) := \frac{1}{\varphi(x)} \int_{-\infty}^{x} f(t)\varphi(t)dt = -\frac{1}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$.
$\Rightarrow h'(x) = f(x) - \frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} \int_{-\infty}^{x} f(t)\varphi(t)dt \overset{\varphi'(x) = -x\varphi(x)}{=} f(x) + xh(x)$.
• *Mit* $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ *und* $x > 0$
$|h(x)| \leq \frac{M}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} \varphi(t)dt \leq \frac{M}{\varphi(x)} \int_{x}^{\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)dt = \frac{M}{x}$
Analog $|h(x)| \leq \frac{M}{-x}$ *für* $x < 0 \rightsquigarrow |h(x)| \leq \frac{M}{|x|}$ *für* $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.
$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x \cdot h(x)| \leq M \Rightarrow h' \in C_b(\mathbb{R})$ *mit* $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)| \leq 2M$.

Beweis von ZGS (Forts.)

$$
\begin{aligned}
E[f(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] &= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - E[\frac{S_n}{\sqrt{n}} h(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{\tilde{S}_n + X_1}{\sqrt{n}})] \text{ mit } \tilde{S}_n := \textstyle\sum_{i=2}^n X_i \\
&= E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - \sqrt{n} E[X_1 h(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}})] - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) ds] \\
&\overset{X_1 \text{ und } \tilde{S}_n \text{ unabh.}}{=} E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}})] - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) ds] \\
&\overset{E(X_1^2) = 1}{=} E[h'(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) - h'(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}})] \\
&\qquad - E[X_1^2 \textstyle\int_0^1 \left(h'(\frac{\tilde{S}_n + sX_1}{\sqrt{n}}) - h'(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}) \right) ds] \\
&=: E(U_n) - E(V_n) \\
&= E(U_n; A_{n,k}) - E(V_n; A_{n,k}) \\
&\quad + E(U_n; A_{n,k}^c) - E(V_n; A_{n,k}^c) \text{ mit } A_{n,k} = \{|\tilde{S}_n/\sqrt{n}| \le k\}.
\end{aligned}
$$

Beweis von ZGS (Forts.)

- $U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}}(\omega) = \left(h'\left(\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}} + \frac{X_1(\omega)}{\sqrt{n}}\right) - h'\left(\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right)\right) \mathbb{1}_{\left|\frac{\tilde{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right| \leq k}$

h' gleichm. stetig auf $[-k, k] \Rightarrow U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}} \to 0$ f.s. für $n \to \infty$.

Ferner $|U_n \cdot \mathbb{1}_{A_{n,k}}| \leq |U_n| \leq 4M \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(U_n; A_{n,k}) \to 0$.

- Analog $V_n \mathbb{1}_{A_{n,k}} \to 0$ f.s.

$|V_n \mathbb{1}_{A_{n,k}}| \leq 4MX_1^2 \in L^1(P) \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(V_n; A_{n,k}) \to 0$.

- $|E(U_n \mathbb{1}_{A^c_{n,k}})| \leq 4MP(A^c_{n,k}) \overset{\text{Tscheb.}}{\leq} \frac{4M}{k^2} V\left(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{Biename}}{=} \frac{4M}{k^2} \frac{n-1}{n}$
- $|E(V_n \mathbb{1}_{A^c_{n,k}})| \leq 4MP(X_1^2 \mathbb{1}_{A^c_{n,k}}) \overset{\text{Unabh.}}{=} 4ME(X_1^2) \cdot P(A^c_{n,k}) \overset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{4M}{k^2}$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|E\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| \leq \frac{8M}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \text{ Beh.}$$

3.1 Schwache Konvergenz

Portmanteau Theorem

Satz 3.2 *Sei* (S, τ) *ein top. Raum mit* $\mathcal{S} = \sigma(\tau)$. *Dann sind. äquivalent*

1. $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. $\mu(A) \geq \limsup_n \mu_n(A) \, \forall A \subset S$ *abgeschlossen*
3. $\mu(O) \leq \liminf_n \mu_n(O) \, \forall O \subset S$ *offen*
4. $\mu(G) = \lim_n \mu_n(G) \, \forall G \in \mathcal{S}$ *mit* $\mu(\partial G) = 0$.

Lemma 3.1 *Für* $A \subset S$ *abg.* $\mu(A) = \inf\{\int_S \phi(x)\mu(dx) \mid \phi \in C_b(S), \phi \geq \mathbb{1}_A\}$.

Bew: (Satz 3.2) *Schreibweise* $\langle \varphi, \mu \rangle = \int_S \varphi(x)\mu(dx)$.

"i) $\Rightarrow$ ii)": *Sei* $\varphi \in C_b(S), \varphi \geq \mathbb{1}_A$. $\langle \varphi, \mu_n \rangle \geq \sup_{m \geq n} \langle \varphi, \mu_m \rangle \geq \sup_{m \geq n} \mu_m(A)$

$\stackrel{n \to \infty}{\Longrightarrow} \langle \varphi, \mu \rangle \geq \limsup_n \mu_n(A) \stackrel{\text{Lemma 3.1}}{\Longrightarrow} \mu(A) \geq \limsup_n \mu_n(A)$.

"ii) $\Rightarrow$ iii)": *Folgt durch Übergang zu Komplementmengen.*

"iii) $\Rightarrow$ iv)": $\mu(G) = \mu(\mathring{G}) \leq \liminf \mu_n(\mathring{G}) \leq \liminf \mu_n(G)$
$\leq \limsup \mu_n(G) \leq \limsup \mu_n(\bar{G}) \leq \mu(\bar{G}) = \mu(G)$.

Bew: (Forts.)

" iv) $\Rightarrow$ i)": $\psi \in C_b(S)$, $t \mapsto F_\psi(t) := \mu(\{\psi \geq t\})$ *rechtsstetig*
$\Rightarrow$ *hat nur abzählbar viele Sprünge*
$\Rightarrow \mu(\{\psi \geq t\}) = \mu(\{\psi > t\})$ *für dx-fast alle* $t \in \mathbb{R}$.
$\int_S \psi(x)\mu(dx) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{\psi \geq t\})dt$
$\overset{\text{iv)}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_n \mu_n(\{\psi \geq t\})dt \overset{\text{Dom. Konvergenz}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \mu_n(\{\psi \geq t\})dt$.

Satz 3.3 *Für eine Folge* $(\mu_n)_n$ *von W-Maßen auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *gilt* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *gdw.* $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *in denen* $F_\mu(.)$ *stetig.*

Bew: *Folgt aus Satz 3.2 iv), da* $\mu(\{x\}) = F_\mu(x) - \lim_{y \nearrow x} F_\mu(y) \, \forall x \in \mathbb{R}$, *d.h.* $\mu([a,b]) = \mu((a,b))$, *falls* F_μ *in a und b stetig.* $\square$

Satz 3.4 (Skorokhod) *Falls* $X_n \Rightarrow X$ *für eine Familie von* $\mathbb{R}^d$*-wertigen ZV'en, so ex. ein W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und* $\tilde{X}, \tilde{X}_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *mit* $X \sim \tilde{X}, X_n \sim \tilde{X}_n$, *s.d.* $\tilde{X}_n \to \tilde{X}$ *P-fast sicher.*

Bew: *Ohne Beweis. Ansonsten [Durrett], Kap. 8.* $\square$