Kolmogorov'sche Ungleichung

Lemma 2.7 *Für* $X_1, \cdots, X_n$ *unabh. mit* $E(X_i) = 0$ *und* $s_n^2 := \sum_{i=1}^n V(X_i)$

$$P(\max_{1\le k\le n} |\sum_{i=1}^k X_i| \ge l) \le \frac{s_n^2}{l^2}.$$

Bemerkung *"Tschebyshev-Ungl. für Maximum"* $T_n := \max_{1\le k\le n} |\sum_{i=1}^k X_i|$

Bew: $E_k := \{|S_1| < l, \ldots, |S_{k-1}| < l, |S_k| \ge l\} \Rightarrow \{T_n \ge l\} = \dot{\bigcup}_k E_k$

$$P(E_K) \le \frac{1}{l^2} E(S_k^2; E_k) \le \frac{1}{l^2} E(S_k^2 + (S_n - S_k)^2; E_k)$$

$$\overset{\text{Unabhängigkeit}}{=} \frac{1}{l^2} E(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2; E_k) = \frac{1}{l^2} E(S_n^2; E_k).$$

$$\Rightarrow P(T_n \ge l) = \sum_k P(E_k) \le \sum_k \frac{1}{l^2} E(S_n^2; E_k) = \frac{1}{l^2} E(S_n^2).$$

Kolmogorov'scher Reihensatz

Satz 2.13 *Für eine Folge unabh. ZV'en* $X_1, X_2, \ldots,$ *mit* $E(X_i) = 0$ *und* $\sum_i V(X_i) < \infty$ *konvergiert* $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i$ *fast sicher.*

Lemma 2.8 *Eine Folge von* (S_n) *von ZV'en konvergiert fast sicher genau dann, wenn* $P(\sup_{n \leq k \leq m} |S_k - S_n| > \delta) \to 0$ *für* $m \geq n \to \infty$.

Bew: *Siehe Übungen.*

Bew: (Satz 2.13)

$$\stackrel{\text{Kolmogorov Ungl.}}{\Longrightarrow} P(\sup_{n \leq k \leq m} |S_k - S_n| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{j=n+1}^{m} V(X) \stackrel{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aussage folgt mit Lemma 2.8.

Kolmogorov'scher Reihensatz: Umkehrung

Satz 2.14 *Für (X_n) Folge unabh. ZV'en mit $E(X_n) = 0$ und $|X_n| \leq C$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus $\sum_n X_n$ konv., dass $\sum_n V(X_n) < \infty$.*

Bew: Sei $\sigma_n^2 := V(X_n)$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 := 0$

- Für $L > 0$ sei $F_n(L) := \{|S_1| \leq L, \dots, |S_n| \leq L\}$.

$$\sum_n X_n \text{ ex. f.s. } \Rightarrow P(\bigcup_{L\in\mathbb{N}} \bigcap_n F_n(L)) = 1$$

$$\Rightarrow \exists\, L > 0 : P(F_n(L)) \geq \delta > 0 \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- $E(S_n^2; F_{n-1}) = E(S_{n-1}^2 + 2X_n S_{n-1} + X_n^2; F_{n-1})$
  $= E(S_{n-1}^2; F_{n-1}) + E(X_n^2) \cdot P(F_{n-1}) \geq E(S_{n-1}^2; F_{n-1}) + \sigma_n^2 \delta$

- $E(S_n^2, F_{n-1}) = E(S_n^2, F_n) + E(S_n^2, F_{n-1} \setminus F_n)$
  $\leq E(S_n^2, F_n) + (L + C)^2 P(F_n \setminus F_{n-1})$

$$\Rightarrow \delta \sigma_n^2 \leq E(S_n^2; F_n) - E(S_{n-1}^2, F_{n-1}) + (L + C)^2 P(F_{n-1} \setminus F_n)$$

(Teleskopsumme, $S_n^2 \leq L$ auf F_n)

$$\Rightarrow \delta \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 \leq L^2 + (L + C)^2$$

□

Kolmogorov'scher Drei-Reihen-Satz

Satz 2.15 $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *ist konvergent für* (X_n) *unabh.* $\Leftrightarrow$ *i) & ii) & iii)*
i) Für ein $C > 0$ *ist* $\sum_n P(|X_n| > C) < \infty$.
ii) Für $Y_n := X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq C}$ *konvergiert* $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(Y_n)$
iii) Für Y_n *wie in ii) ist* $\sum_{n\in\mathbb{N}} V(Y_n) < \infty$.

Bew.: "$\Leftarrow$": $\hat{Y}_n := Y_n - \mathbb{E}(Y_n) \overset{\text{K'scher Reihens.}}{\Longrightarrow} \sum \hat{Y}_n$ konvergiert f.s.

$\Rightarrow \sum Y_n = \sum(\hat{Y}_n + E(Y_n))$ konvergiert f.s.

$\sum P(X_n \neq Y_n) = \sum P(|X_n| > C) < \infty$

$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} X_n = Y_n$ für schließich alle $n \in \mathbb{N}$ f.s.

$\Rightarrow \sum X_n$ konvergiert f.s.

Beweis (Forts.)

"$\Rightarrow$": • $\sum X_n$ ex. $\Rightarrow |X_n| \leq C$ für schließich alle n mit W-keit 1.

$\overset{\text{Borel-0/1}}{\Longrightarrow} \sum P(|X_n| > C) < \infty \rightsquigarrow$ i)

• $\overset{\text{i) \& Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \sum Y_n$ konv.

Sei $Y'_n \sim Y_n$ eine unabh. Kopie von X_n, d.h.

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega = \{\bar{\omega} = (\omega', \omega) \,|\, \omega', \omega \in \Omega\}$$

$$\bar{P}(d(\omega', \omega)) = P(d\omega') \otimes P(d\omega)$$

$$\bar{Y}'_n(\bar{\omega}) := Y_n(\omega'),\ \bar{Y}_n(\bar{\omega}) := Y_n(\omega)$$

$\Rightarrow \{\bar{Y}_n, \bar{Y}'_n, n \in \mathbb{N}\}$ unabh.

$\Rightarrow \bar{P}(\sum \bar{Y}'_n \text{ konv.}) = \bar{P}(\sum \bar{Y}_n \text{ konv.}) = P(\sum Y_n \text{ konv.}) = 1.$

$\Rightarrow \sum \bar{Z}_n$ konvergiert f.s. für $\bar{Z}_n := \bar{Y}_n - \bar{Y}'_n$

$E(\bar{Z}_n) = 0$ und $|\bar{Z}_n| \leq 2C$ f.s.

$\overset{\text{Satz 2.14}}{\Longrightarrow} \sum V(\bar{Z}_n) = 2 \sum V(Y_n) < \infty \rightsquigarrow iii)$

• $\overset{\text{iii) \& K'scher Reihens.}}{\Longrightarrow} \sum \hat{Y}_n$ konv. mit $\hat{Y}_n = Y_n - E(Y_n)$

$\Rightarrow \sum E(Y_n) = \sum (Y_n - \hat{Y}_n)$ konv. $\rightsquigarrow$ ii)

Levy'sche Ungleichung

Lemma 2.9 *Falls* $X_1, \ldots, X_n$ *unabh. ZV mit* $P(|\sum_{k=i}^n X_i| \geq \frac{l}{2}) \leq \delta$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$, *so folgt*

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{i=1}^k X_i| \geq l) \leq \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Bew:

- *Sei* $E_k := \{|S_1| < l, \ldots, |S_{k-1}| < l, |S_k| \geq l\}$
  $\Rightarrow$ *Mit* $T_n := \max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{i=1}^k X_i|$ *folgt* $\{T_n \geq l\} = \dot{\bigcup}_k E_k$

- $P(T_n \geq l, |S_n| \leq \frac{l}{2}) = \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n| \leq \frac{l}{2}\})$
  $\leq \sum_{k=1}^n P(E_k \cap \{|S_n - S_k| \geq \frac{l}{2}\}) = \sum_{k=1}^n P(E_k) P(\{|S_n - S_k| \geq \frac{l}{2}\})$
  $\leq \delta P(T_n \geq l)$

- *Wegen* $P(T_n \geq l, |S_n| > \frac{l}{2}) \leq P(|S_n| > \frac{l}{2}) \leq \delta$
  $P(T_n \geq l) \leq \delta P(T_n \geq l) + \delta \Rightarrow$ *Behauptung.* $\square$

Satz von Levy

Satz 2.16 *Für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ mit (X_n) unabh. gilt*

S_n *konvergiert fast sicher* $\Leftrightarrow$ S_n *konvergiert stochastisch.*

Bew: *"$\Rightarrow$" klar.*

"$\Leftarrow$": S_n konvergiere stochastisch

$$\Rightarrow P(|S_n - S_m| > \delta) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon, \delta > 0 \quad \exists\, N_0 : \; P(|\textstyle\sum_{i=k+1}^m X_i| > \delta) \leq \epsilon \quad \forall m \geq k \geq N_0.$$

$$\overset{\text{Levy-Ungleichung}}{\Longrightarrow} \forall \epsilon, \delta > 0 \quad \exists N_0 : \forall m > k \geq N_0$$

$$P(\max_{l \in k,\ldots,m} |S_l - S_m| > 2\delta)$$

$$= P(\max_{l \in k,\ldots,m} |\textstyle\sum_{i=l+1}^m X_i| > 2\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$$

Aussage folgt mit Lemma 2.8. $\square$

Kapitel 3:

Zentraler Grenzwertsatz

Schwache Konvergenz

Definition 3.1 *Sei (S,τ) topologischer Raum, Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{S} = \sigma(\tau)$.*

- *Eine Folge von W-Maßen auf $(S,\mathcal{S})$* **konvergiert schwach** *gegen das W-Maß μ, falls für alle $\varphi : S \to \mathbb{R}$ beschränkt stetig*
$$\int_S \varphi(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \int_S \varphi(x)\mu(dx) \ .$$
- *Eine Folge (X_n) von S-wertien ZV'en $X_n : \Omega_n \to S$* **konvergiert schwach** *gegen $X : \Omega \to S$, falls*
$$Vert_{X_n} \stackrel{schwach}{\longrightarrow} Vert_X .$$

Schreibweise $\mu_n \Rightarrow \mu$ bzw. $X_n \Rightarrow X$.

Bemerkung

- *"$\Rightarrow$" erzeugt die* **'schwache Topologie'** *auf $\mathcal{P}(S)$.*
- $(X_n \Rightarrow X) \iff E[\varphi(X_n)] \to E[\varphi(X)] \, \forall \, \varphi \in C_b(S)$.
- $(\delta_{s_n} \Rightarrow \delta_s) \iff s_n \to s$, *für $n \to \infty$.*

Zentraler Grenzwertsatz

Satz 3.1 (ZGS) *Für eine unabh. ident. vert. Folge $(X_n)_n$ von ZV'en mit $E(X_1) = m$ und $V(X_1) = \sigma^2$ gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dass*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \nu_{0,1}.$$

Bemerkung $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *beschreibt* **'Fluktuationen'** *beim GGZ* $\frac{1}{n} S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$.