Satz von Cramér

Definition 2.6 *Sei $X \simeq \nu$ eine reelle ZV mit Verteilung μ.*

- $\lambda : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $\lambda_\mu(t) := E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\mu(dx)$ *heißt* **Laplace-Transformierte von X (bzw. von μ)**.
- $I_\mu : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $I_\mu(x) := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(tx - \log\lambda_\mu(t))$ *heißt* **Cramér-Transformierte von μ.**

Satz 2.9 (Cramér 1938) *Sei (X_n) Folge unabh. ident. verteilter ZV'en mit $X_1 \simeq \mu$, dann gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $x > E(X_1)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\frac{1}{n}S_n \geq x\right) = -I_\mu(x).$$

Bemerkung

- *Tausch X gegen $-X$ $\rightsquigarrow$ Analog für $P(\frac{1}{n}S_n \leq x)$ f. $x < E(X_1)$.*
- $t \to \Lambda_\mu(t) := \log\lambda_\mu(t)$ **'Log-Laplace-Transformierte'**.
  $I_\mu(x) = \sup_t(tx - \Lambda(t))$ **'Legendre-Transformierte'** *von Λ.*

Entropieungleichung

Satz 2.10 *Für* $\mu, \nu \in P(S)$

$$Ent_\mu(\nu) = \sup_{\psi: S \to \mathbb{R} \text{ messb.}} E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi).$$

Bew: *Schreibweise* $E_\mu(\psi) := \langle \psi, \mu \rangle$

- *Falls* $\nu = \varphi\mu$:

$$\langle \psi, \nu \rangle - Ent_\mu(\nu) = \langle \psi - \log \varphi, \nu \rangle = \langle \log(\tfrac{e^\psi}{\varphi}), \nu \rangle$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\Longrightarrow} \leq \log \langle \frac{e^\psi}{\varphi}, \nu \rangle = \log \langle e^\psi, \mu \rangle.$$

$$\Rightarrow Ent_\mu(\nu) \geq E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi) \quad \forall \psi.$$

Außerdem gilt "=" *falls* $\psi := \log \varphi$.

- *Falls nicht* $\nu = \varphi\mu$ *für ein gewisses* φ

$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{S}$, *s.d.* $\nu(A) > 0$ *und* $\mu(A) = 0$.

$\Rightarrow$ *mit* $\psi = t\mathbb{1}_A$ *gilt*

$$E_\nu(\psi) - \log E_\mu(e^\psi) = t\nu(A) - \log E_\mu(1) = t\nu(A) \overset{t \to \infty}{\to} \infty.$$

Lemma 2.5 *Für* $U_z = \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid E_\mu(x) > z\}$ *ist* $I_\mu(z) = \inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu)$.

Bew: *Schreibweise* $E_\mu(X) = \langle x, \mu \rangle$ *bzw.* $E_\mu(e^{tX}) = \langle e^{tx}, \mu \rangle$.

- *Sei* $\nu \in U_z \overset{\text{Entropieungleichung}}{\Longrightarrow}$
  $$Ent_\mu(\nu) \geq \langle t \cdot x, \nu \rangle - \log\langle e^{tx}, \mu \rangle \geq tz - \log\langle e^{tx}, \mu \rangle$$
  $$\overset{\text{Def. von } I_\mu}{\Longrightarrow} \inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu) \geq I_\mu(z)$$

- *Umgekehrt gilt für* $t^* = argmax_t\, \rho_z(t) := (tz - \log\langle e^{tx}, \mu \rangle)$
  $$\rho_z'(t^*) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\langle e^{t^* x}, \mu \rangle} \langle x e^{t^* x}, \mu \rangle$$
  $$\Rightarrow \nu(dx) := \frac{1}{\langle e^{t^* x}, \mu \rangle} e^{t^* x} \mu(dx) \text{ neues W-Maß,}$$
  $$\nu \in \overline{U_z}$$
  $$\overset{\text{Einsetzen}}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = \rho_z(t^*) = I_\mu(z).$$

Bew: (Satz 2.9) *Im Spezialfall, dass* $\mu(S) = 1$ *mit* $S \subset \mathbb{R}$ *endlich:*

- $\mu_{X^{(n)}} \in \mathcal{P}_n(S) \subset \mathcal{P}(S)$.
- $\mathcal{P}(S) \mapsto \mathbb{R}$, $\mu \mapsto E_\mu(X) = \sum_{s \in S} s\mu(s)$ *ist stetig.*

$$\Rightarrow U_z = \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid E_\mu(X) > z\} \subset \mathcal{P}(S) \text{ offen}$$

- $E_{\mu_{X^{(n)}}}(x) = \frac{1}{n} S_n$ *und* $\frac{1}{n} S_n > z \Leftrightarrow \mu_{X^{(n)}} \in U_z$

$\overset{Sanov}{\Longrightarrow} \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z) = -\inf_{\nu \in U_z} Ent_\mu(\nu) \overset{Lemma\ 2.5}{=} -I_\mu(z)$.

- $\forall\, z < x < z'$:

$$I_\mu(z') = \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z') \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log P(S_n \geq x)$$
$$\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log P(S_n \geq x) \leq \lim_n \frac{1}{n} \log P(S_n > z) = I_\mu(z)$$

$\Rightarrow$ *Beh. folgt aus Lemma 2.5, da* $z \to I_\mu(z)$ *stetig.*

Nachtrag: W-Maße auf $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Bezeichnungen

$\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_i)_{\in\mathbb{N}} \,|\, \omega_i \in \mathbb{R}\}$
$pr_n : \Omega \to \mathbb{R}^n, pr_n(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$
$pr_n^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (\omega_1, \ldots, \omega_m) \to (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ für $m \geq n$.
$\mathcal{Z} = \{Z \subset \Omega \,|\, Z = pr_n^{-1}(B), n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$,
$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z}) \subset 2^{\Omega}$.

Definition 2.7 *Eine Folge von W-Maßen auf μ_n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, heißt* **konsistent**, *falls $(pr_n^m)_* \mu_m = \mu_n$ für alle $m \geq n$.*

Bsp. 2.3 $\mu_n(dx_1 \ldots, dx_n) := \otimes_{i=1}^n \mu(dx_i)$ *(n-faches Produktmaß).*

Satz 2.11 (Kolmog. Konsistenzsatz) *Eine Familie $(\mu_n)_n$ von W-Maßen ist konsistent genau dann wenn ein (eindeutiges) W-Maß μ_∞ auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ ex., so dass*

$$\mu_n = (pr_n)_* \mu_\infty \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Korollar 2.5 *Für ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ex. genau ein W-Maß μ_∞ auf $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathcal{Z}))$ so dass $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_n(\omega) = \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine unabh. Folge von μ-verteilten ZV'en definiert.*

Beweis von Satz 2.11

Lemma 2.6 *Sei η ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, so ex. zu $\epsilon > 0$ ein $K_\epsilon \subset A$ kompakt, s.d. $\eta(A \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.*

Bew: *Mengen A mit dieser Eigensch. bilden ein $\cap$-stabiles Dynkin-System, welches die Mengen $A = \bigtimes_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$ enthält.* $\square$

Bew: (Satz 2.11)

- *$\mathcal{Z}$ ist ein Ring. Definiere Inhalt auf $\mathcal{Z}$: $\mu_0(Z) := \mu_n(B)$ falls $Z = pr_n^{-1}(B) \in \mathcal{Z}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\overset{\text{Konsistenz}}{\Longrightarrow}$ μ_0 wohldefiniert.*
- *Zeige: μ_0 Prämaß auf $\mathcal{Z}$: $Z_n = pr_n^{-1}(B_n) \searrow \emptyset \overset{!}{\Rightarrow} \mu_0(Z_n) \searrow 0$.*

Angen. $\exists\, \delta > 0$: $\mu_0(Z_n) \geq \delta > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Sei $K_n \subset B_n$ kp. mit $\mu_n(B_n \setminus K_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$ und $C_n := pr_n^{-1} K_n \in \mathcal{Z}$.
Sei $D_n = \cap_{i=1}^n C_i \Rightarrow D_n = pr_n^{-1} F_n$ für $F_n \subset K_n$ abgeschlossen.

$$\mu_0(D_n) \geq \delta - \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^{i+1}} \geq \frac{\delta}{2} \Rightarrow F_n \neq \emptyset.$$

Wähle $\omega^{(n)} \in D_n \forall n \in \mathbb{N}$. $\overset{\text{Diagonalfolge}}{\Longrightarrow} \exists\, (\omega^{(n')})_{n'}$, $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots) \in \Omega$

$$\text{s.d. } (\omega_1^{(n')}, \dots, \omega_m^{(n')}) \overset{n' \to \infty}{\longrightarrow} (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m) \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\overset{F_m \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m) \in F_m \forall m \Rightarrow \bar{\omega} \in D_m \forall m \Rightarrow \cap_m D_m \neq \emptyset.$$

Wegen $D_n \subset Z_n$ mit $Z_n \searrow \emptyset \Rightarrow D_n \searrow \emptyset \rightsquigarrow$ Widerspruch. $\square$

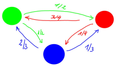
2.4 Reihen unabhängiger Zufallsvariablen

Terminale σ-Algebra

Definition 2.8 *Für eine Folge von σ-Algebren $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$ ist die* **terminale σ-Algebra** *gegeben durch*

$$\mathcal{T} = \cap_n \sigma(\cup_{m \geq n} \mathcal{F}_m).$$

Bsp. 2.4 $\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{G, R, B\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,
$E = \{R, G, B\}$, $\mathcal{E} = 2^E$,



$$X_n : \Omega \mapsto E, \quad X_n((\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \omega_n,\ \mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$$

$\Rightarrow \{\omega \in \Omega \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n(\omega)=G} = \infty\} \in \mathcal{T}$.

Bsp. 2.5 *Sei X_n eine Folge von ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$, dann ist*

$$E := \{\omega \in \Omega \,|\, \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) \text{ konvergiert}\} \in \mathcal{T}.$$

Kolmogorov'sches 0-1-Gesetz

Satz 2.12 *Falls $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-unabh. σ-Algebren, so gilt $P(E) \in \{0,1\}$ für alle $E \in \mathcal{T}$.*

Bew: (Satz 2.12) $\left(\mathcal{F}_n, \bigcup\limits_{k\geq m} \mathcal{F}_k\right)$ *unabh.* $\forall\, m > n \overset{\text{Lemma 2.1}}{\Longrightarrow} \left(\mathcal{F}_n, \sigma\big(\bigcup\limits_{k\geq m} \mathcal{F}_k\big)\right)$ *unabh.*

$\Rightarrow (\mathcal{F}_n, \mathcal{T})$ *unabh.* $\forall\, n \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{l\geq n} \mathcal{F}_l, \mathcal{T}\right)$ *unabh.* $\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} (\mathcal{T}, \mathcal{T})$ *unabh.*

$$\Rightarrow E \text{ unabh. von } E \quad \forall\, E \in \mathcal{T}$$

d.h. $P(E) = P(E \cap E) = P(E)^2 \Rightarrow P(E) \in \{0,1\}$. □

Korollar 2.6 *Für eine Folge (X_n) von unabh. ZV'en auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$P(\{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ konvergiert}\}) \in \{0,1\}.$$

Definition 2.9 *Für eine Folge (X_n) heißt $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$* **konvergent**, *falls $P(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ konv. }) = 1$.*