Satz von Etemadi (1981)

Satz 2.6 *Es sei $(X_n)_n$ eine Folge von ident. verteilten, paarweise unabh. ZV'en auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(|X_1|) < \infty$, so gilt mit $m = E(X_1)$, dass*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n\to\infty} m \text{ fast sicher.}$$

Bew: *O.b.d.A. $X_i \geq 0$, andernfalls behandle X_+ und X_- separat.*

1. Schritt *Sei $Y_i = X_i \mathbb{1}_{X_i \leq i}$, $\quad S_n^* = \sum_{i=1}^n Y_i \quad \alpha > 1$ und $k_n := \lfloor \alpha^n \rfloor$.*

$$\overset{\text{Tshebyschev}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} P\Big(\frac{|S_{k_n}^* - ES_{k_n}^*|}{k_n} \geq \epsilon\Big) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{V(S_{k_n}^*)}{k_n^2}$$

$$\overset{\text{Biename}}{=} \frac{1}{\epsilon^2}\sum_n \frac{1}{k_n^2}\sum_{i=1}^{k_n} V(Y_i) \leq \frac{2}{\epsilon^2}\sum_n \frac{1}{k_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}(Y_i^2) = \frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i,n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{k_n \geq i}\frac{1}{k_n^2}\mathbb{E}(Y_i^2)$$

$$= \frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k_n\geq i}\frac{1}{k_n^2}\Big)\mathbb{E}(Y_i^2) \leq \frac{2}{\epsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{9}{8\ln\alpha}\frac{1}{i^2}\mathbb{E}(Y_i^2) =: c(\epsilon,\alpha)\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{E(Y_i^2)}{i^2}$$

$$= c\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}\int_0^i x^2 dF(x) = c\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}\sum_{k=0}^{i-1}\int_k^{k+1} x^2 dF(x)$$

$$\leq c\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} x^2 dF(x) \leq c\sum_k \int_k^{k+1} x\,dF(x) = c\mathbb{E}(X_1) < \infty.$$

$$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \frac{1}{k_n}(S_{k_n}^* - E(S_{k_n}^*)) \to 0 \text{ fast sicher.}$$

Bew. (Forts.)

2. Schritt

- $E(X_1) = \lim_n E(Y_n) \Rightarrow \lim_n \frac{1}{n} E(S_n^*) = \mathbb{E}(X_1)$

$$\Rightarrow \frac{S_{k_n}^*}{k_n} \to E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n \neq Y_n) = \sum_n P(X > n) = \sum_n \int_n^\infty dF(x)$

$$= \sum_n \sum_{i\geq n} \int_i^{i+1} dF(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} i \int_i^{i+1} dF(x) \leq E(X_1) < \infty$$

$$\Rightarrow X_n \neq Y_n \text{ nur für endlich viele } n \text{ fast sicher.}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{k_n}}{k_n} \to E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

3. Schritt

Wegen $X_i \geq 0$ ist S_n monoton.

$\Rightarrow$ Für eine beliebige Teilfolge $m \to \infty$ gilt

$$\frac{S_{n_{k_m}}}{m} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{n_{k_m+1}}}{m}, \text{ falls } k_m \text{ so gewählt, dass } m \in [n_{k_m}, n_{k_m+1}[$$

$$\Rightarrow \frac{n_{k_m}}{m} \geq \frac{1}{\alpha} \text{ und } \frac{n_{k_m+1}}{m} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X_1) \leq \liminf \frac{1}{n} S_n \leq \limsup \frac{1}{n} S_n \leq \alpha\mathbb{E}(X_1) \text{ fast sicher}$$

Wegen $\alpha > 1$ beliebig folgt die Behauptung. $\square$

Satz von Etemadi: Umkehrung

Satz 2.7 *Falls (X_n) Folge von paarw. unabh. ident. verteilten ZV'en, so dass $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i =: Y$ ex. fast sicher, so ist $X_1 \in L^1(\Omega)$ und*

$$Y \equiv E(X_1) \text{ fast sicher.}$$

Lemma 2.2 *Für eine ZV $Z \geq 0$ gilt $E(Z^p) = p\int_0^\infty t^{p-1}P(Z \geq t)dt$.*

Bew:

$$E(Z^p) = E(p\int_0^Z t^{p-1}dt) = p\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}\mathbb{1}_{t\leq Z}dtP(d\omega)$$

$$= p\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}\int_\Omega \mathbb{1}_{t\leq Z}P(d\omega)dt = p\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{p-1}P(Z \geq t)dt$$

Bew: (Satz 2.7) $\frac{1}{n}S_n \to Y.$ *f.s.* $\Rightarrow \frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}S_{n-1} \to 0$ *f.s.*

$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$ *mit* $A_n = \{|X_n| \geq n\}$

$$\overset{\text{Chung-}0/1}{\Longrightarrow} \sum_n P(A_n) < \infty.$$

$$P(A_n) = P(|X_1| \geq n)$$

$$\overset{\text{Lemma 2.2}}{\Longrightarrow} E(|X_1|) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} P(|X_1| \geq n) < \infty.$$

$$\overset{\text{Etemadi}}{\Longrightarrow} Y = \lim \frac{1}{n}S_n = E(X_1) \text{ fast sicher.} \qquad \square$$

2.3 Satz von Sanov (Große Abweichungen)

Entropie

Definition 2.4 *Sei $(S, \mathcal{S})$ ein messb. Raum.*

- $\mathcal{P}(S) := \{\mu \,|\, \mu \text{ ist W-Maß auf } (S, \mathcal{S})\}$
- *Für* $\mu \in \mathcal{P}(S)$ *heißt* $Ent_\mu : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$Ent_\mu(\nu) := \begin{cases} \int\limits_S \ln(\varphi(x))\, \nu(dx) & \text{falls } \nu(dx) = \varphi(x)\mu(dx) \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

relative Entropie (von ν) bzgl. μ.

Bemerkung $\Leftrightarrow Ent_\mu(\nu) = \int_S \ln(\varphi(x))\varphi(x)\, \mu(dx)$ *falls* $\nu(dx) = \varphi(x)\mu(dx)$.

Lemma 2.3 *i)* $Ent_\mu(\nu) \geq 0$ *mit* $Ent_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$.
ii) $Ent_\mu(t\nu_1 + (1-t)\nu_2) \leq tEnt_\mu(\nu_1) + (1-t)Ent_\mu(\nu_2)$

Bew: $Ent_\mu(\nu) = \int_S \eta(\varphi(x))\, \mu(dx)$ *mit* $s \to \eta(s) := s\ln(s)$ *konvex*

$\overset{Jensen}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = \int_S \eta(\varphi(x))\mu(dx) \geq \eta(\int_S \varphi(x)\mu(dx)) = \eta(1) = 0.$

$\overset{Jensen^{*9}}{\Longrightarrow} Ent_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \int_S \varphi(x)\mu(dx)\ \mu\text{-f.s} \Leftrightarrow \nu = \mu \leadsto i).$

$\overset{\eta \text{ konvex}}{\Longrightarrow} \eta(t\varphi_1(x) + (1-t)\varphi_2(x)) \leq t\eta(\varphi_1(x)) + (1-t)\eta(\varphi_2(x)) \leadsto ii).$

[9] Jensen*: Für $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist $E_P(\eta(X)) \geq \eta(E_P(X))$ mit "=" genau dann, wenn $X = E_P(X)$ P-fast sicher.

Satz von Sanov (1957)

Definition 2.5 *Für* $(S, \mathcal{S})$ *messb. Raum und* $(X_1, \ldots, X_n) =: X^{(n)} \in S^n$ *heißt*

$$\mu_{X^{(n)}} = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^n \delta_{X_i} \in \mathcal{P}(S)$$

empirische Verteilung von $(X) = (X_1, \ldots, X_n)$.

Bemerkung *Falls* S *endliche Menge* $\rightsquigarrow \mathcal{P}(S)$ *Standard-Simplex in* $\mathbb{R}^{|S|}$

$$\mathcal{P}(S) \hat{=} \{(\mu_1, \ldots, \mu_{|S|}) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid \sum_{s \in S} \mu(s) = 1\} = \Delta_{n-1} \subset \mathbb{R}^{|S|}$$

$$|\mu - \nu|_{\mathcal{P}(S)} := |\mu - \nu|_{\mathbb{R}^{|S|}}$$

Satz 2.8 (Sanov) *Sei* S *endliche Menge,* $\mu \in \mathcal{P}(S)$ *und* (X_n) *eine Folge unabh.* μ*-verteilter ZV'en. Dann gilt für offenes* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$

$$\tfrac{1}{n} \cdot \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in \mathcal{A}) \longrightarrow -\inf_{\nu \in \mathcal{A}} Ent_\mu(\nu).$$

Bemerkung $\rightsquigarrow$ *Exponentielle Konvergenz der empirsichen Verteilungen:*

$$P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) \simeq \exp(-n \, Ent_\mu(\nu))$$

Lemma 2.4 *Für* $\nu \in \mathcal{P}_n := \{\mu \in \mathcal{P}(S) \mid n \cdot \mu(s) \in \mathbb{N}\ \forall s \in S\}$ *gilt*

$$\left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{|S|} e^{-nEnt_\mu(\nu)} \leq P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) \leq e^{-nEnt_\mu(\nu)}.$$

Bew: $\xi_n := (n\mu_{X^{(n)}}(s))_{s\in S} \in \mathbb{R}^{|S|}$ *ist* (n,μ)*-multinomialverteilt*

$$\pi_n(\nu|\mu) := P(\mu_{X^{(n)}} = \nu) = \kappa_n(\nu) \cdot \prod_{s\in S} (\mu(s))^{n\nu(s)}$$

mit

$$\kappa_n(\nu) := |\{x^{(n)} \in S^n \mid \mu_{x^{(n)}} = \nu\}| = \frac{n!}{(n\nu(s_1))!\ldots(n\nu(s_{|S|}))!}$$

$$\prod_{s\in S} (\mu(s))^{n\nu(s)} = exp\Big[n \sum_{s\in S} \nu(s) \ln(\mu(s))\Big] =: e^{n\,H(\nu|\mu)}$$

- $\Rightarrow \kappa_n(\nu) e^{nH(\nu|\nu)} = \pi_n(\nu|\nu) \leq 1$
  $$\Rightarrow \kappa_n(\nu) \leq e^{-nH(\nu|\nu)}$$
- $\stackrel{Multinomialverteilung}{\Longrightarrow} \pi_n(\tilde\nu|\nu) \leq \pi_n(\nu|\nu)\ \forall \nu, \tilde\nu \in \mathcal{P}_n$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{\tilde\nu\in\mathcal{P}_n} \pi_n(\tilde\nu|\nu) \leq |\mathcal{P}_n| \pi_n(\nu|\nu) \leq (n+1)^{|S|} \pi_n(\nu|\nu).$$

$$\Rightarrow \kappa_n(\nu) = e^{-nH(\nu|\nu)} \pi_n(\nu|\nu) \geq e^{-nH(\nu|\nu)} \cdot (n+1)^{-|S|}$$

$\Rightarrow$ *Behauptung, da* $H(\nu|\nu) - H(\nu|\mu) = Ent_\mu(\nu)$. □

Bew: (Satz 2.8) $A \subset \mathcal{P}(S)$

- $P(\mu_{X^{(n)}} \in A) = \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} \pi_n(\mu, \nu) \overset{\text{Lemma 2.4}}{\leq} \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} e^{-nEnt_\mu(\nu)}$

$\leq |A \cap \mathcal{P}_n| \exp\big(-n \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\leq (n+1)^{|S|} \exp\big(-n \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\overset{\lim_{n\to\infty} \frac{|S|}{n} \ln(n+1) = 0}{\Longrightarrow} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \leq -\inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu)$

- $P(\mu_{X^{(n)}} \in A) = \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} \pi_n(\mu, \nu)$

$\overset{\text{Lemma 2.4}}{\geq} (n+1)^{-|S|} \sum_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} e^{-nEnt_\mu(\nu)}$

$\geq (n+1)^{-|S|} \exp\big(-n \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu)\big)$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \geq -\limsup_{n\to\infty} \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu)$

- $Ent_\mu : A \cap \{Ent_\mu(.) < \infty\} \to \mathbb{R}$ *stetig,* $A \subset \mathcal{P}(S)$ *offen*

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \inf_{\nu \in A \cap \mathcal{P}_n} Ent_\mu(\nu) = \inf_{\nu \in A} Ent_\mu(\nu) \qquad \square$

Korollar 2.4
$$\begin{cases} \liminf \frac{1}{n} \log P(\mu_{X^{(n)}} \in O) \geq -\inf_O Ent_\mu & \textit{für } O \subset \mathcal{P}(S) \textit{ offen} \\ \limsup \frac{1}{n} \log P(\mu_{X^{(n)}} \in A) \leq -\inf_A Ent_\mu & \textit{für } A \subset \mathcal{P}(S) \textit{ abg.} \end{cases}$$

Bemerkung *Kor. 2.4* $\leftrightarrow$ **'Prinzip der großen Abweichungen'** *für* $(\mu_{X^{(n)}})_n$